Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra MA1101-2026-1

CONTROL 1, parte 2

P1. a) (i) **(1 pt.)** Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$ Muestre que $\mathcal{P}(A \setminus B)$ **no** es subconjunto de $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Solución:
Determinemos los conjuntos involucrados:
Primero, $A \setminus B = \{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$.
Así, $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Por otra parte, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ y $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{2, 3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.
Calculando la diferencia de los dos conjuntos anteriores, obtenemos: $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.
(0,5 pts.)

Notando que $\emptyset \in \mathcal{P}(A \setminus B)$, pero $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$, podemos concluir que $\mathcal{P}(A \setminus B)$ no es subconjunto de $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. **(0,5 pts.)**

ii) **(1 pt.)** Demuestre que para todo par de conjuntos A, B se tiene

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \neq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

Solución:
Notar que $\emptyset$ es un elemento del conjunto de las partes de cualquier conjunto, por tanto, $\emptyset \in \mathcal{P}(A \setminus B)$.
Por otra parte, como $\emptyset$ pertenece a ambos conjuntos, $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$, no pertenecerá a su diferencia, esto es $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. **(0,6 pts.)**
Luego $\mathcal{P}(A \setminus B)$ y $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ no tienen los mismos elementos, por lo que son conjuntos distintos.
(0,4 pts.)

b) **(2 pts.)** Sean A, B conjuntos cualquiera. Demuestre que

$$A \cap B = \emptyset \iff B \subseteq A^c.$$

Solución:
Primera forma (usando las definiciones formales directamente):
Sea E el conjunto de referencia, entonces

$$\begin{aligned}
A \cap B = \emptyset &\iff \forall x \in E, x \in A \cap B \iff x \in \emptyset && \text{(Definición de } = \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff \forall x \in E, x \in A \wedge x \in B \iff F && \text{(Definiciones de } \cap \text{ y } \emptyset \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff \forall x \in E, \overline{x \in A \wedge x \in B} && \text{(Tautología: } (p \iff F) \iff \overline{p} \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff \forall x \in E, \overline{x \in B} \vee \overline{x \in A} && \text{(Ley de De Morgan y conmutatividad de } \vee \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff \forall x \in E, x \in B \implies \overline{x \in A} && \text{(Caracterización de } \implies \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff \forall x \in E, x \in B \implies x \in A^c && \text{(Definición de complemento – } \mathbf{0{,}3\ pts.}) \\
&\iff B \subseteq A^c && \text{(Definición de } \subseteq \text{ – } \mathbf{0{,}2\ pts.})
\end{aligned}$$

Segunda forma (usando las definiciones, pero a través de una doble implicación y argumentos por contradicción):

Demostremos la equivalencia mostrando que se tienen las dos implicaciones: $A \cap B = \emptyset \implies B \subseteq A^c$ y $B \subseteq A^c \implies A \cap B = \emptyset$.

$\underline{A \cap B = \emptyset \implies B \subseteq A^c}$:

Nuestra hipótesis es que $A \cap B = \emptyset$, y nuestra labor es probar que $B \subseteq A^c$.

Para usar la definición de inclusión, sea E el conjunto de referencia, y sea $x \in E$ un elemento cualquiera. **(0,1 pts.)**

Si $x \in B$, por contradicción, supongamos que no es cierto que $x \in A^c$, esto es, que $x \in A$. **(0,2 pts.)**

Entonces, x es un elemento tanto de A como de B, por tanto, $x \in A \cap B$. **(0,2 pts.)**

Pero esto es imposible, puesto que, por hipótesis, $A \cap B = \emptyset$. Entonces, debe ser cierto que $x \in A^c$. **(0,4 pts.)**

Así, $\forall x \in E, x \in B \implies x \in A^c$, es decir, $B \subseteq A^c$. **(0,1 pts.)**

$\underline{B \subseteq A^c \implies A \cap B = \emptyset}$:

Nuestra hipótesis es ahora que $B \subseteq A^c$, y nuestra labor es probar que $A \cap B = \emptyset$.

Por definición de $\emptyset$, necesitamos mostrar que $x \in A \cap B$ es siempre falso. **(0,2 pts.)**

Por contradicción, supongamos que para algún $x \in E$ se tiene que $x \in A \cap B$ es verdadero. **(0,2 pts.)**

Entonces para ese x se tendrá que $x \in A \wedge x \in B$. **(0,1 pts.)**

Pero como por hipótesis $B \subseteq A^c$, de lo anterior se deduce que $x \in A \wedge x \in A^c$. **(0,2 pts.)**

Así, $x \in A \wedge \overline{x \in A}$, lo que es imposible. **(0,1 pts.)**

Luego, $\forall x \in E, (x \in A \cap B$ es falso), de donde, $A \cap B = \emptyset$. **(0,2 pts.)**

Tercera forma (también a través de una doble implicación, pero usando propiedades de conjuntos):

$\underline{A \cap B = \emptyset \implies B \subseteq A^c}$:

Como $B \subseteq E$ y $E = A \cup A^c$, entonces $B \subseteq A \cup A^c$. **(0,2 pts.)**

Como además $B \subseteq B$, intersectando estas dos inclusiones (propiedad 3.9 del apunte):

$B \cap B \subseteq (A \cup A^c) \cap B$. **(0,2 pts.)**

Usando distributividad, y que $B \cap B = B$:

$B \subseteq (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$. **(0,2 pts.)**

Usando la hipótesis de que $A \cap B = \emptyset$ y la propiedad de que para cualquier C, $\emptyset \cup C = C$:

$B \subseteq A^c \cap B$. **(0,2 pts.)**

Como $A^c \cap B \subseteq A^c$, usando transitividad de $\subseteq$ se concluye finalmente que:

$B \subseteq A^c$. **(0,2 pts.)**

$\underline{B \subseteq A^c \implies A \cap B = \emptyset}$:

Como $A \subseteq A$, intersectando esta inclusión con la de la hipótesis (esto es, usando la propiedad 3.9 del apunte):

$A \cap B \subseteq A \cap A^c$. **(0,3 pts.)**

Usando la propiedad de que $A \cap A^c = \emptyset$, resulta que:

$A \cap B \subseteq \emptyset$. **(0,2 pts.)**

Pero además el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, luego:

$\emptyset \subseteq A \cap B$. **(0,2 pts.)**

Así, de la propiedad de que $C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C$, resulta la igualdad deseada:

$A \cap B = \emptyset$. **(0,3 pts.)**

c) **(2 pts.)** Sea E una conjunto de referencia y $C \subseteq E$ un conjunto cualquiera que satisface:

$$\forall A, B \subseteq E, (A \cap C = B \cap C \implies A = B).$$

Demuestre que $C = E$.
Indicación: Elija conjuntos adecuados A, B.

Solución:
Como la hipótesis que satisface C comienza con un cuantificador $\forall A, B \subseteq E$, y por lo tanto es algo que se verifica para todo par de subconjuntos A, B de E, sabemos que podemos aplicarla para aquellos $A, B \subseteq E$ que consideremos convenientes. **(0,4 pts.)**
En este caso, como lo que hay que demostrar a partir de dicha hipótesis es que $C = E$, y lo cuantificado en la hipótesis es una implicación cuya conclusión es $A = B$, es natural partir probando con

$$A = C \text{ y } B = E$$

(que, por supuesto, son ambos subconjuntos de E). **(0,4 pts.)**
Con esta elección de A, B, tenemos que debe ser cierta la implicación

$$C \cap C = E \cap C \quad \Longrightarrow \quad C = E.$$

(0,4 pts.)

En la implicación verdadera anterior, la hipótesis equivale a $C = C$ (usando las propiedades de conjuntos $A \cap A = A$ y $E \cap A = A$), que es verdadera **(0,4 pts.)**, de lo que se deduce que la conclusión de la implicación también tiene que ser verdadera. **(0,4 pts.)**
Por lo tanto hemos probado que $C = E$.

P2. a) **(2 pts.)** Sean A, B conjuntos cualquiera. Demuestre que

$$A \Delta (A \cup B) = B \setminus A.$$

Solución:
Primera forma (usando definición de diferencia simétrica): Recordemos que por definición

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Aplicando esto con $X = A$ e $Y = A \cup B$, se obtiene:

$$A \Delta (A \cup B) = (A \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cup B) \setminus A).$$

Como $A \subseteq A \cup B$, se tiene $A \setminus (A \cup B) = A \cap (A \cup B)^c = \emptyset$ pues es la intersección de conjuntos disjuntos **(0,6 pts.)**
Además,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus A &= (A \cup B) \cap A^c && \text{(def. de diferencia)} \\
&= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) && \text{(distrib de } \cap \text{ c/r a } \cup) \\
&= (A \cap A^c) \cup (B \setminus A) && \text{(def. de diferencia)} \\
&= \emptyset \cup (B \setminus A) = B \setminus A. && \text{(prop. } X \cap X^c = \emptyset)
\end{aligned}$$

(0,8 pts.)
Por lo tanto,

$$A \Delta (A \cup B) = \emptyset \cup (B \setminus A) = B \setminus A.$$

(0,6 pts.)

Segunda forma (por pertenencia de elementos):

Sea x un elemento cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
x \in A\Delta(A\cup B) &\iff (x\in A \wedge x\notin A\cup B)\vee(x\in A\cup B\wedge x\notin A) && \text{(def. dif. simétrica – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff F\vee(x\in A\cup B\wedge x\notin A) && \text{(pues } A\subseteq A\cup B\text{– } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff ((x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin A) && \text{(def. de unión– } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff (x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in B\wedge x\notin A) && \text{(distrib. de } \wedge \text{ c/r a } \vee\text{– } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff F\vee(x\in B\wedge x\notin A) && \text{(def. de conjunto– } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff x\in B\wedge x\notin A && \text{(F es netro para } \vee\text{– } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff x\in B\setminus A. && \text{(def. de diferencia– } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

Luego ambos conjuntos tienen los mismos elementos, y así

$$A\Delta(A\cup B) = B\setminus A.$$

(**0,2 pts.**)

b) (i) **(2 pts.)** Sea E un conjunto de referencia y sean $a, b \in E$ y $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $a \in A$ y $b \in B$. Demuestre que

$$A\times B\neq\emptyset.$$

Solución:
Como $a \in A$ y $b \in B$, por definición de producto cartesiano:

$$(a,b)\in A\times B.$$

(1 pto.)
Entonces $A \times B$ posee al menos un elemento, por lo tanto

$$A\times B\neq\emptyset.$$

(1 pto.)

(ii) **(2 pts.)** Sean $A, B.C, D$ conjuntos cualquiera tales que $C \cap D \neq \emptyset$. Demuestre que

$$A\cap B\neq\emptyset \iff (A\times C)\cap(B\times D)\neq\emptyset.$$

Solución:
Demostraremos ambas implicaciones.
$\underline{A\cap B\neq\emptyset \implies (A\times C)\cap(B\times D)\neq\emptyset:}$
Como $A \cap B \neq \emptyset$, existe x tal que $x \in A$ y $x \in B$. **(0,2 pts.)**
Además, como $C \cap D \neq \emptyset$, existe y tal que $y \in C$ y $y \in D$. **(0,2 pts.)**
Entonces

$$(x,y)\in A\times C \quad \text{y} \quad (x,y)\in B\times D.$$

(0,2 pts.)
Por lo tanto,

$$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D),$$

de donde

$$(A\times C)\cap(B\times D)\neq\emptyset.$$

(0,4 pts.)
$\underline{(A\times C)\cap(B\times D)\neq\emptyset \implies A\cap B\neq\emptyset:}$
Existe (x, y) tal que

$$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D).$$

(0,4 pts.)
Entonces $(x, y) \in A \times C$ y $(x, y) \in B \times D$, luego

$$x \in A, \quad x \in B.$$

(0,4 pts.)
Así, $x \in A \cap B$, y por consiguiente

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

(0,2 pts.)
Concluimos que

$$A \cap B \neq \emptyset \iff (A \times C) \cap (B \times D) \neq \emptyset.$$

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Justifique sus respuestas.
No olvide anotar su nombre y RUT, identificando sus hojas de respuestas.