Pauta de corrección Control 1

P1. a) i) **(1.5 puntos)** Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre sin usar tabla de verdad que la siguiente proposición es una contradicción

$$\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})} \wedge r.$$

.

ii) **(1.5 puntos)** Niegue la siguiente proposición "Si recuerdo la letra, entonces cantaré la canción."

Solución

i)

$$\begin{aligned}
\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})} \wedge r &\Leftrightarrow (\overline{p} \wedge (p \wedge q)) \wedge r \text{ [Por Leyes De Morgan y doble negación]}\\
&\Leftrightarrow ((\overline{p} \wedge p) \wedge q) \wedge r \text{ [Por asociatividad de } \wedge\text{]}\\
&\Leftrightarrow (F \wedge q) \wedge r \text{ [Por dominancia]}\\
&\Leftrightarrow F \wedge r \text{ [Por dominancia]}\\
&\Leftrightarrow F \text{ [Por dominancia]}
\end{aligned}$$

(1.5 pts.)

ii) "recuerdo la letra y no cantaré la canción." **(1.5 pts.)**

Indicaciones de corrección

i) Otras respuestas a considerar correctas son las siguientes.

- Para probar que es una contradicción es necesario probar que es Falsa independientemente del valor de verdad de las proposiciones p, q, r. Notar que para probar que es una contradicción basta demostrar que $\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})}$ es Falsa, pues para que el valor de verdad de la proposición sea siempre Falsa independiente de el de r, se tiene que tener en particular que sea Falsa para $r \Leftrightarrow V$, en cuyo caso por Identidad
$$\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})} \wedge V \Leftrightarrow \overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})}.$$
Probar que $\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})}$ es Falsa es equivalente a probar que $h : p \vee \overline{(p \wedge q)}$ es Verdadero por Doble Negación. Podemos ponernos en caso para el valor de Verdad de p. En caso $p \Leftrightarrow V$, h es Verdadero por Dominancia. En caso $p \Leftrightarrow F$, es necesario probar que $h : \overline{(p \wedge q)}$ es Verdadero, por Dominancia. Usamos Leyes de Morgan para reescribir h como $\overline{p} \vee \overline{q}$. Basta demostrar que $\overline{p}$ es Verdadero. Es Verdadero por hipótesis.
- Argumentos mixtos y completos usando las dos demostraciones anteriores también son correctos.

ii) Otras respuestas a considerar correctas son las siguientes.

- "Es falso que si recuerdo la letra, entonces cantaré la canción."
- Definamos la proposición p que afirma "recuerdo la letra" y otra proposición q que afirma "cantaré la canción". La proposición del enunciado establece $p \Rightarrow q$, que por tautologia conocida (caracterización de implicancia) se puede escribir como $\overline{p} \vee q$. Para negar esta proposición puede usarse Leyes De Morgan y Doble negación, para concluir que $\overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$, que se lee "recuerdo la letra y no cantaré la canción."

Notas para la parte i):

- Si se resuelve mediante una cadena de equivalencias, pero no se mencionan ninguna Tautología usada por su nombre, pero se dice vista en clases o en apunte, considerar puntaje completo.

- Si por otra parte, no se hace referencia a nada, descontar 0.5 puntos, siempre y cuando en cada pasa se utilice solo una.
- Si en un paso se utilizan 3 o más Taulogias Conocidas y sin hacer referencia que Tautología conocida, entonces descontar 1 pto.
- Si se resuelve exclusivamente por tabla de verdad asignar 0 pts.
- Si se resuelve usando Tautologia (o esquema de mostración) 'por casos', y está correcto, asignar puntaje completo.

b) Considere las variables $x, y, z \in \mathbb{Z}$, es decir que son enteros, y la función proposicional:

$$P(x,y,z): x^2 + y^2 \leq z^2.$$

Escriba la negación de las siguientes proposiciones. Luego, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones originales. En caso de ser cierta demuéstrela y en caso de ser falsas demuestren su negación.

i) **(1.5 puntos)** $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x,y,z)$.
ii) **(1.5 puntos)** $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ P(x,y,z)$.

Solución

i) La negación de la proposición del enunciado corresponde a

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, \neg P(x,y,z)$$

donde

$$\neg P(x,y,z): x^2 + y^2 > z^2.$$

La negación de la proposición del enunciado es Verdadera, pues puede tomarse $x = 1, y = 1, z = 0$ y $x^2 + y^2 = 1 + 1 > 0 = z^2$. Luego la proposición del enunciado es Falsa.

Nota: Considerar 0.5 pts por negación de la proposición del enunciado y 1 pto por la demostración del valor de verdad de la proposición.

(1.5 pts.)

ii) La negación de la proposición del enunciado corresponde a

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, \neg P(x,y,z)$$

donde

$$\neg P(x,y,z): x^2 + y^2 > z^2.$$

La proposición del enunciado es Verdadera, una demostración es la siguiente:
Sea $x \in \mathbb{Z}$, por demostrar que $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, P(x,y,z)$. Sea $y \in \mathbb{Z}$, por demostrar que $\exists z \in \mathbb{Z}, P(x,y,z)$. Reescribiendo el objetivo, hay que demostrar que $\exists z \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq z^2$. Concluimos tomando $z = |x| + |y|$, ya que $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2$, ya que $2|x||y| \geq 0$.

Nota: Considerar 0.5 pts por negación de la proposición del enunciado y 1 pto por la demostración del valor de verdad de la proposición.

(1.5 pts.)

Indicaciones de corrección

i) Otras respuestas a considerar correctas son las siguientes.

- La Negación de

$$h_1: \forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x,y,z)$$

corresponde a

$$h_2: \neg(\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x,y,z)).$$

Definimos

$$Q(x): \forall y \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x,y,z)$$

Luego, por Negación de Cuantificadores

$$h_2 : \exists x \in \mathbb{Z}, \neg Q(x).$$

Definimos

$$R(y) : \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x, y, z).$$

Luego, por Negación de Cuantificadores

$$\neg Q(x) : \exists y \in \mathbb{Z}, \neg R(y).$$

Definimos

$$H(z) : P(x, y, z).$$

Luego, por Negación de Cuantificadores

$$\neg R(y) : \exists z \in \mathbb{Z}, \neg H(y).$$

Finalmente, $h_2 : \exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, \neg P(x, y, z)$. Donde $\neg P(x, y, z) : x^2 + y^2 > z^2$. Podemos probar que la proposición del enunciado es Falsa exhibiendo un contraejemplo. Consideramos $x = 1, y = 1, z = 0$, se tiene que $x^2 + y^2 = 1 + 1 > z^2 = 0$, lo que es una contradicción.

- Otra respuesta que combine partes de cada respuesta aquí, u otro argumento completo, considerar puntaje completo.

ii) Otras respuestas a considerar correctas son las siguientes.

- Se puede proceder paso a paso, negando cada proposición anidada como se hizo en la solución alternativa de la parte anterior. Además, se puede probar que la proposición del enunciado es Verdadera probando que su negación es Falsa. Para esto, notar que la negación del enunciado es equivalente a

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 > z^2.$$

Y esto es Falso, ya que si fuera cierto, entonces

$$\forall z \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 > z^2,$$

como $z^2 \geq z$ para $z \in \mathbb{Z}$, lo anterior implica que

$$\forall z \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 > z,$$

lo que es una contradicción, pues basta tomar $z = x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$, y no se satisface $x^2 + y^2 > z$.

Nota: Si se intercambian de orden cuantificadores de $\forall$ y $\exists$ usando una equivalencia y no un implica, descontar 0.5 pts. y conclusiones obtenidas a partir de aquí no son válidas.

P2. a) **(3 puntos)** Demuestre usando inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n^3}{3} \leq 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 \leq n^3.$$

Indicación: Recuerde que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3. \tag{1}$$

Solución

Caso base: Debemos demostrar que la proposición es cierta para $n = 0$. En este caso tenemos **(1 pts.)**

$$\frac{n^3}{3} = 0^3/3 = 0^2 = 0^3 = n^3.$$

Paso Inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis inductiva

$$\frac{n^3}{3} \leq 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 \leq n^3, \qquad \textbf{(0.4 pts.)} \tag{HI}$$

ahora debemos mostrar que la proposición es cierta cuando cambiamos n por $n+1$.

Primera forma: Para la primera desigualdad **(0.8 pts.)**

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^3}{3} = \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} &\overset{(\text{HI})}{\leq} 0^2 + ... + n^2 + n^2 + n + 1 \\ &\leq 0^2 + ... + n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= 0^2 + ... + n^2 + (n+1)^2.\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad **(0.8 pts.)**

$$\begin{aligned}(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\overset{(\text{HI})}{\geq} 0^2 + ... + n^2 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\geq 0^2 + ... + n^2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= 0^2 + ... + n^2 + (n+1)^2.\end{aligned}$$

Segunda forma: Para la primera desigualdad **(0.8 pts.)**

$$0^1 + ... + n^2 + (n+1)^2 \overset{(\text{HI})}{\geq} \frac{n^3}{3} + n^2 + 2n + 1 \geq \frac{n^3}{3} + 3n^2 + 3n + 1 = \frac{(n+1)^3}{3}.$$

Para la segunda desigualdad **(0.8 pts.)**

$$0^1 + ... + n^2 + (n+1)^2 \overset{(\text{HI})}{\leq} n^3 + n^2 + 2n + 1 \leq n^3 + 3n^3 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

Indicaciones de corrección

Para el caso base dar 0.5 puntos por cada desigualdad. En el caso de comenzar por 1 y no por 0 dar máximo 0.6 puntos.
Para el paso inductivo: Notar que cada desigualdad tiene dos formas de realizarse. Para cada desigualdad dar 0.5 puntos por utilizar correctamente la hipótesis inductiva y 0.5 puntos por concluir. En esta segunda parte es fundamental çompletar el cubo del binomioüsando las desigualdades correctas. Si los estudiantes solamente indican la hipótesis inductiva pero nunca la usan, no dar puntos.

b) Se define la función proposicional $P(\cdot)$ por recurrencia

$$P(n) : \begin{cases} V & \text{si } n = 0, \\ P(n-1) \implies F & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Adicionalmente, se define $Q(n)$: "n es par".

c) **(1 punto)** Determine el valor de verdad de $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ y $P(4)$.

Solución

Notar que

$$\begin{aligned} P(1) &\iff [P(0) \implies F] \iff [V \implies F] \iff F, \\ P(2) &\iff [P(1) \implies F] \iff [F \implies F] \iff V, \\ P(3) &\iff [P(2) \implies F] \iff [V \implies F] \iff F, \\ P(4) &\iff [P(3) \implies F] \iff [F \implies F] \iff V. \end{aligned}$$

Indicaciones de corrección

Dar 0.25 puntos por cada caso correcto. Considerar cada igualdad independientemente, es decir perdonar errores de arrastre. Quitar 0,1 puntos por cada vez que no se usa un $\iff$ y que se debiera usar, máxima penalización 0,3 puntos.

d) **(2 puntos)** Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \iff Q(n)$.

Solución

Primera forma: Se demostrará por inducción.
Caso base: Para $n = 0$ se tiene que

$$P(0) \iff V \iff \text{“0 es par”} \iff Q(0).$$

Paso inductivo:
Sea $n \in \mathbb{N}$, asumimos la hipótesis inductiva

$$P(n) \iff Q(n). \tag{HI$_2$}$$

Ahora falta mostrar que $P(n+1) \iff Q(n+1)$. Hay que dividir por casos
Si n es par: Entonces por (HI$_2$) sabemos que $P(n) \iff V$, por lo tanto

$$P(n+1) \iff [P(n) \implies F] \iff [V \implies F] \iff F.$$

Y adicionalmente $Q(n+1) \iff F$. En consecuencia $P(n+1) \iff Q(n+1)$.
Si n es impar: Entonces por (HI$_2$) sabemos que $P(n) \iff F$, por lo tanto

$$P(n+1) \iff [P(n) \implies F] \iff [F \implies F] \iff V.$$

Y adicionalmente $Q(n+1) \iff V$. En consecuencia $P(n+1) \iff Q(n+1)$.

Segunda forma: Notemos que

$$P(n+1) \iff [P(n) \implies F] \iff [\overline{P(n)} \vee F] \iff [\overline{P(n)}]. \tag{2}$$

Al mismo tiempo, $Q(n+1) \iff \overline{Q(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ $Q(n+1) = \overline{Q(n)}$. Esto se puede demostrar por casos: si n es par $Q(n+1) \iff F$ y $Q(n) \iff V$, si n es impar $Q(n+1) \iff V$ y $Q(n) \iff F$. Como $Q(0) \iff V$ y tiene la misma fórmula que $P(n)$ concluimos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \iff P(n)$.

Indicaciones de corrección

Para la primera forma: Se debe entregar 0.5 puntos por dar la idea de usar inducción y demostrar el caso base. Luego dar 0.5 puntos por notar que hay que separar en casos. Finalmente 0.5 por cada caso demostrado correctamente.
Para la segunda forma: dar 0.6 puntos por notar que la definición por hacer correctamente (2). 0.8 puntos por notar que $Q(n+1) = \overline{Q(n)}$. Finalmente 0.6 puntos por concluir que porque se definen de la misma manera, son iguales.

Recuerde que se puede usar todo resultado visto en clases, auxiliares o que aparezca en el apunte. Cualquier fórmula (excepto (1)) que quiera usar y que no se haya visto en estos contextos, debe ser demostrada.
No olvide justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.