

Pauta Control 1

Profesores: C. Conca, J. Ortega & J. Ramírez

Fecha: Jueves 16 de Abril de 2026

P1. Considere un campo escalar radial

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{r} = (x, y, z) \mapsto f(r),$$

donde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Suponga que f es suficientemente diferenciable, continuamente.

- (0.5 pts.)** Obtenga una expresión para el gradiente ∇f .
- (1.0 pts.)** Obtenga una expresión para el laplaciano Δf .
- (0.5 pts.)** Verifique que si $f(r) = \frac{1}{r}$, entonces $\Delta f = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- (1.0 pts.)** Demuestre que para todo $n \geq 1$,

$$\nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}.$$

- (1.5 pts.)** Calcule el rotacional

$$\nabla \times (f(r)\vec{r}).$$

- (1.5 pts.)** Sea $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ fijo. Considere $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$. Demuestre que

$$\nabla \times \vec{v} = 2\vec{w}.$$

Solución

- Notar que:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Análogamente } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

(0.3 pts.)

Luego, por regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}$$

$$\text{Asímismo } \frac{\partial f}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(r) \frac{z}{r}. \text{ Con esto:}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{f'(r)}{r} (x, y, z) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$$

(0.2 pts.)

- Usando la parte anterior y por propiedad de la divergencia tenemos:

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \left(\frac{f'(r)}{r} \vec{r} \right) = \left(\nabla \cdot \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \right) \cdot \vec{r} + \frac{f'(r)}{r} \nabla \cdot \vec{r} \quad (1)$$

(0.3 pts.)

Ahora bien, por regla del cociente (en su versión de varias variables):

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{f'(r)}{r}\right) &= \frac{1}{r^2}(\nabla(f'(r))r - f'(r)\nabla(r)) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(r\frac{f''(r)}{r}\vec{r} - f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right) \\ &= \frac{f''(r)}{r^2}\vec{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\vec{r}\end{aligned}$$

donde usamos que $\nabla(f'(r)) = \frac{f''(r)}{r}\vec{r}$ por parte anterior, y $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$

(0.4 pts.)

Reemplazando en (1):

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\nabla\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\right) \cdot \vec{r} + \frac{f'(r)}{r}\nabla \cdot \vec{r} \\ &= \frac{f''(r)}{r^2}\vec{r} \cdot \vec{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\vec{r} \cdot \vec{r} + 3\frac{f'(r)}{r} \\ &= f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + 3\frac{f'(r)}{r} \\ &= f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}\end{aligned}$$

(0.3 pts.)

c) Si $f(r) = \frac{1}{r}$ entonces $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$ y $f''(r) = \frac{2}{r^3}$

(0.3 pts.)

Por parte anterior:

$$\Delta f = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0$$

(0.2 pts.)

d) Sea $n \geq 1$. Notar que $r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$, luego:

$$\frac{\partial(r^n)}{\partial x} = \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}2x = n(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-2}{2}}x = nr^{n-2}x$$

(0.7 pts.)

Análogamente:

$$\frac{\partial(r^n)}{\partial y} = nr^{n-2}y, \quad \frac{\partial(r^n)}{\partial z} = nr^{n-2}z$$

Con esto:

$$\nabla(r^n) = (nr^{n-2}x, nr^{n-2}y, nr^{n-2}z) = nr^{n-2}(x, y, z) = nr^{n-2}\vec{r}$$

(0.3 pts.)

e) Por definición:

$$\begin{aligned}\nabla \times (f(r)\vec{r}) &= \nabla \times ((f(r)x, f(r)y, f(r)z)) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)y) \right) \hat{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)x) \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(r)y) - \frac{\partial}{\partial y}(f(r)x) \right) \hat{k}\end{aligned}$$

(0.3 pts.)

Usando el cálculo en (a), lo anterior es:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial y}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)y) \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(f(r)x) \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(r)y) - \frac{\partial}{\partial y}(f(r)x) \right) \hat{k} \\ &= \left(zf'(r)\frac{y}{r} - yf'(r)\frac{z}{r} \right) \hat{i} - \left(zf'(r)\frac{x}{r} - xf'(r)\frac{z}{r} \right) \hat{j} + \left(yf'(r)\frac{x}{r} - xf'(r)\frac{y}{r} \right) \hat{k} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

(1.2 pts.)

Indicación: Si no se hizo la parte (a) e hicieron aquí el cálculo correspondiente, distribuir el puntaje a discreción.

f) Tenemos:

$$\vec{w} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2z - w_3y) \hat{i} - (w_1z - w_3x) \hat{j} + (w_1y - w_2x) \hat{k}$$

(0.5 pts.)

Luego

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_2z - w_3y & w_3x - w_1z & w_1y - w_2x \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(w_1y - w_2x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_3x - w_1z) \right) \hat{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(w_1y - w_2x) - \frac{\partial}{\partial z}(w_2z - w_3y) \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(w_3x - w_1z) - \frac{\partial}{\partial y}(w_2z - w_3y) \right) \hat{k} \\ &= (w_1 - -w_1) \hat{i} - (-w_2 - w_2) \hat{j} + (w_3 - -w_3) \hat{k} \\ &= (2w_1, 2w_2, 2w_3) \\ &= 2\vec{w}\end{aligned}$$

(1.0 pts.)

P2. a) (2.0 pts.) Sea

$$\vec{F}(x, y) = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}.$$

Calcule la integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva dada por la lenteja formada en el primer cuadrante por las ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$.

b) Considere el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y \arctan(z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{i} + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x \arctan(z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{j} + z \hat{k}$$

1) (1.0 pts.) Muestre (justificando apropiadamente) que el campo \vec{F} se escribe en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan(z^2) \hat{\theta} + z \hat{k}$$

Indicación: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ y $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$

2) (1.0 pts.) Calcule $\text{div}(\vec{F})$.

3) (1.5 pts.) Si Γ es la circunferencia que resulta de intersectar la esfera centrada en el origen y radio R con el plano $z = H$ (con $|H| < R$), calcule la integral de trabajo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

4) (0.5 pts.) ¿Es \vec{F} un campo conservativo? Justifique su respuesta.

Solución

a) La curva Γ es una curva cerrada en el primer cuadrante formada por la unión de dos curvas:

- $\Gamma_1: y = x^2$, desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$,
- $\Gamma_2: x = y^2$, desde $(1, 1)$ hasta $(0, 0)$.

Por un lado Γ_1 se parametriza por

$$\vec{r}_1(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

(0.2 pts.)

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ 3t^2 - 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 2t + t^4 + 6t^3 - 8t^2 dt \\ &= 1 + \frac{1}{5} + 6\frac{1}{4} - 8\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

(0.7 pts.)

Por otro lado Γ_2 se parametriza por:

$$\vec{r}_2(t) = ((t-1)^2, t-1) \quad t \in [0, 1]$$

(0.2 pts.)

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t-1)^2 + (t-1)^2 \\ 3(t-1) - 4(t-1)^2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(t-1) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 6(t-1)^3 + 3(t-1) - 4(t-1)^2 dt \\ &= -6\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} \\ &= -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

(0.7 pts.)

Por lo tanto:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{30} - \frac{5}{3} = -\frac{49}{30}$$

(0.2 pts.)

b) 1) Ordenando se tiene que:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} (x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\arctan(z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y\hat{i} + x\hat{j}) + z\hat{k}$$

(0.4 pts.)

Usando $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$ se obtiene:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\rho} (\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}) + \arctan(z^2) (-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}) + z\hat{k}$$

(0.4 pts.)

Usando la indicación se obtiene:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan(z^2) \hat{\theta} + z\hat{k}$$

(0.2 pts.)

2) Usando que la expresión de la divergencia con las variables (ρ, θ, z) viene dada por:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_\rho h_\theta h_z} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (F_\rho h_\theta h_z) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\rho F_\theta h_z) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\rho h_\theta F_z) \right]$$

Sabiendo que $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_z = 1$ la expresión previa, en este caso, se reduce a:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (F_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_z) \right]$$

(0.5 pts.)

En este caso

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\arctan(z^2)) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho z) \right] = 1$$

(0.5 pts.)

3) Esta circunferencia se describe en cilíndricas como $z = H$, $\rho = \sqrt{R^2 - H^2}$, es decir, su parametrización es:

$$\vec{r}(\theta) = (\sqrt{R^2 - H^2} \cos(\theta), \sqrt{R^2 - H^2} \sin(\theta), H), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

(0.5 pts.)

Derivando, se tiene que:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = (-\sqrt{R^2 - H^2} \sin(\theta), \sqrt{R^2 - H^2} \cos(\theta), 0) = \sqrt{R^2 - H^2} \hat{\theta}$$

(0.5 pts.)

Así, el trabajo pedido se calcula como:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \sqrt{R^2 - H^2} \hat{\theta} d\theta = 2\pi \sqrt{R^2 - H^2} \arctan(H^2)$$

(0.5 pts.)

- 4) Dado que la integral de trabajo sobre una curva cerrada no es cero, eso implica que el campo no es conservativo.

(0.5 pts.)

P3. Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in [0, 2\pi],$$

donde $a, b > 0$, y el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z).$$

- (a) **(2.0 pts.)** Verifique que Γ es una curva regular y calcule su longitud en el intervalo $[0, 2\pi]$.
 (b) **(2.0 pts.)** Calcule la integral de línea

$$\int_{\Gamma} z \, ds.$$

- (c) **(2.0 pts.)** Calcule el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de Γ , es decir,

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solución

- (a) Calculamos la derivada de \vec{r} :

$$\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Su norma es

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como $a > 0$ y $b > 0$, se tiene $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, por lo que Γ es una curva regular.

(1.0 pts.)

Calculamos ahora la longitud:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(1.0 pts.)

- (b) Sobre la curva, $z = bt$ y $ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \, dt$.

Luego,

$$\int_{\Gamma} z \, ds = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \, dt$$

(1.0 pts.)

Calculando la integral:

$$\int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 + b^2} \, dt = b \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = b \sqrt{a^2 + b^2} \frac{(2\pi)^2}{2} = b \sqrt{a^2 + b^2} 2\pi^2.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} z \, ds = 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(1.0 pts.)

- (c) Evaluamos el campo sobre la curva. Con $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ y $z = bt$, se obtiene

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-a \sin t, a \cos t, bt).$$

(0.3 pts.)

Recordando que $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, el producto punto resulta

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= (-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t) + (bt)(b) \\ &= a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 t \\ &= a^2 + b^2 t.\end{aligned}$$

(1.0 pts.)

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t) dt \\ &= \left[a^2 t + b^2 \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2.\end{aligned}$$

(0.7 pts.)