



Pauta de corrección Control 1

P1. Sean $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ funciones continuas en $[0, 1]$ y derivables en $(0, 1)$. Supongamos que $f(0) = f(1) = 0$ y que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Además, supongamos que $g(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Sea $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) **(3,0 pts.)** Justifique que h alcanza su máximo en un punto del intervalo $(0, 1)$.

Solución

La función h es continua, ya que es el cociente de las funciones continuas f y g .

(0,5 pts. por justificar que h es continua)

Además, h está definida en un intervalo cerrado y acotado.

(0,5 pts. por notar que el dominio de h es un intervalo cerrado y acotado)

Así, gracias al teorema de Weierstrass, h alcanza su máximo en un punto $\bar{x} \in [0, 1]$.

(0,5 pts. por usar el teorema de Weierstrass)

Solo falta ver que $\bar{x} \in (0, 1)$. Para esto, primero notamos que $h(\bar{x}) > 0$. En efecto, si $x \in (0, 1)$, por hipótesis sabemos que $f(x) > 0$. Combinando esto con la definición de máximo, resulta:

$$h(\bar{x}) \geq h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{0}{g(x)} = 0.$$

(0,5 pts. por mostrar que $h(\bar{x}) > 0$)

Por otro lado,

$$h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{g(0)} = 0$$

$$h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{0}{g(1)} = 0.$$

(0,5 pts. por obtener que $h(0) = h(1) = 0$)

Como $h(\bar{x}) > 0$, vemos que \bar{x} no puede ser 0 ni 1, por lo que $\bar{x} \in (0, 1)$.

(0,5 pts. por concluir)

b) **(3,0 pts.)** Concluya que existe $\bar{x} \in (0, 1)$ tal que $f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x}) = 0$.

Solución

Sabemos que el punto \bar{x} hallado en la parte anterior es un máximo local de la función h .

(0,5 pts. por notar que \bar{x} es un máximo local)

Además, tenemos que h es derivable en $(0, 1)$ porque es el cociente de las funciones f y g , ambas derivables en $(0, 1)$. En particular, h es derivable en \bar{x} .

(0,6 pts. por argumentar que h es derivable en \bar{x})

Así, la regla de Fermat muestra que $h'(\bar{x}) = 0$.

(0,8 pts. por usar la regla de Fermat)

Usando la regla del cociente, tenemos que

$$h'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{(h(\bar{x}))^2} = 0.$$

(0,6 pts. por usar la regla del cociente)

Simplificando, se deduce que $f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x}) = 0$.

(0,5 pts. por concluir)

P2. a) **(3,0 pts.)** Sean $a \geq 2$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Demuestre que el polinomio $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $P(x) = x^n - ax + 1$ tiene una raíz en el intervalo $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$.

Solución

Veremos que P cambia de signo en el intervalo $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$. Tenemos que

$$P\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^n} - \frac{a}{a} + 1 = \frac{1}{a^n} > 0 \quad (0,7 \text{ pts. por mostrar que } P\left(\frac{1}{a}\right) > 0)$$

$$P\left(\frac{2}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^n - \frac{2a}{a} + 1 = \left(\frac{2}{a}\right)^n - 1 \leq 0, \quad (0,5 \text{ pts. por decir que } P\left(\frac{2}{a}\right) \leq 0)$$

donde la última desigualdad sale de que $a \geq 2$, por lo que $\frac{2}{a} \leq 1$ y, por lo tanto, $\left(\frac{2}{a}\right)^n \leq 1$.

(0,4 pts. por justificar la desigualdad)

Concluimos que P cambia de signo en el intervalo $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$.

(0,2 pts. por notar que P cambia de signo en $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$)

Además, P es continuo en este intervalo, ya que es un polinomio.

(0,4 pts. por justificar que P es continuo en $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$)

Así, el teorema de los valores intermedios muestra que existe $\bar{x} \in [\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ tal que $P(\bar{x}) = 0$.

(0,8 pts. por obtener que P tiene una raíz en $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$)

Esto es, P tiene una raíz en el intervalo $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$.

b) (3,0 pts.) Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin^3(x)}.$$

Solución

Notemos que este límite es de la forma $0/0$, por lo que usaremos la regla de l'Hôpital.

(0,3 pts. por notar que el límite es de la forma $0/0$)

Para esto, notamos que las funciones $\arctan(x) - x$ y $\sin^3(x)$ son derivables, ya que son combinaciones de funciones trigonométricas y polinomios.

(0,3 pts. por justificar que el numerador y el denominador son funciones derivables)

Además, la función $(\sin^3(x))' = 3\sin^2(x)\cos(x)$ no se anula en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, salvo en $x = 0$.

(0,3 pts. por justificar que la derivada del denominador no se anula en torno a 0, salvo en 0)

Así, resulta que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin^3(x)} \stackrel{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3\sin^2(x)\cos(x)} \quad (0,6 \text{ pts. por usar la regla de l'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{1+x^2}}{3\sin^2(x)\cos(x)} \quad (0,2 \text{ pts. por simplificar})$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}. \quad (0,3 \text{ pts. por separar los límites})$$

Ahora, usando un límite conocido tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \right)^2 = 1^2 = 1. \quad (0,4 \text{ pts. por usar el límite conocido})$$

Alternativa

El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

también puede calcularse usando la regla de l'Hôpital. Para esto, se debe justificar que es de la forma $0/0$, que tanto el numerador x y denominador $\sin(x)$ son derivables, que la derivada del denominador $\sin'(x) = \cos(x)$ no se anula en torno a 0, y que el nuevo límite existe.

Además,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)\cos(x)} = \frac{1}{(1+0^2)\cos(0)} = 1, \quad (0,3 \text{ pts. por calcular este límite})$$

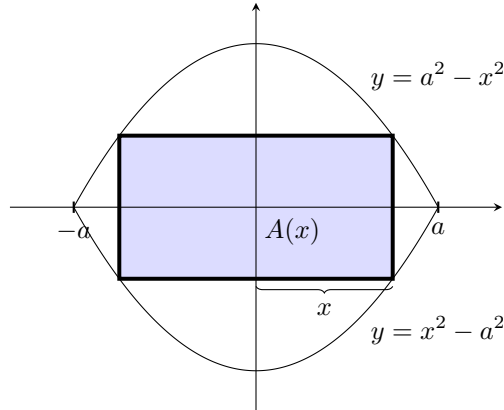
ya que la función $\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$ es continua en $\bar{x} = 0$. **(0,2 pts. por justificar el cálculo del límite)**

Juntando estos resultados, obtenemos finalmente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin^3(x)} = -\frac{1}{3}. \quad \text{(0,1 pts. por concluir)}$$

P3. a) Sea $a > 0$. Considere las funciones $f, g: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 - a^2$ y $g(x) = a^2 - x^2$. El objetivo de este problema es encontrar el área del mayor rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados que puede inscribirse entre los grafos de f y g .

i) **(1,0 pts.)** Sea $A: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna, a cada $x \in [0, a]$, el área del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados que queda inscrito entre los grafos de f y g , y cuyo lado derecho tiene coordenada horizontal x , como muestra la figura. Encuentre una expresión explícita para $A(x)$ en función de x .



Solución

De la figura se desprende que la longitud de la base del rectángulo es de $2x$.

(0,4 pts. por encontrar la longitud de la base del rectángulo)

De manera similar, que la longitud de su altura es

$$(a^2 - x^2) - (x^2 - a^2) = 2(a^2 - x^2).$$

(0,4 pts. por encontrar la longitud de la altura del rectángulo) De este modo, el área buscada es

$$A(x) = 2x \cdot 2(a^2 - x^2) = 4x(a^2 - x^2).$$

(0,2 pts. por multiplicar y encontrar el área del rectángulo)

ii) **(2,0 pts.)** Suponga, sin demostración, que existe un $\bar{x} \in (0, a)$ donde la función A alcanza su máximo. Encuentre el valor de \bar{x} y calcule el área del rectángulo correspondiente.

Solución

Gracias a la regla de Fermat, sabemos que $A'(\bar{x}) = 0$.

(0,5 pts. por notar que \bar{x} debe ser un punto crítico)

Imponiendo esta ecuación, obtenemos

$$A'(\bar{x}) = (4a^2\bar{x} - 4\bar{x}^3)' = 4a^2 - 12\bar{x}^2 = 4(a^2 - 3\bar{x}^2) = 0.$$

(0,5 pts. por derivar correctamente)

Deducimos entonces que $3\bar{x}^2 = a^2$, de donde $\bar{x} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(0,5 pts. por encontrar \bar{x})

Finalmente, evaluamos

$$A(\bar{x}) = A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = 4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}a^3}{9}.$$

(0,5 pts. por evaluar)

b) **(1,5 pts.)** Considere la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Determine si h es continua en $\bar{x} = 0$, justificando su respuesta con una demostración completa.

Solución

Veamos que h es continua en $\bar{x} = 0$. Para esto, debemos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0).$$

(0,4 pts. por enunciar la definición de continuidad)

Por definición de h , la expresión de la derecha es igual a $h(0) = 0$.

(0,4 pts. por encontrar $h(0)$)

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = 0,$$

ya que se trata de un límite nulo por uno acotado.

(0,7 pts. por encontrar este límite)

Alternativa

Este límite también puede justificarse mediante el teorema del sándwich, pues, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$-x \leq x \cos(1/x) \leq x.$$

Como ambas cantidades son iguales a 0, vemos que h es continua en $\bar{x} = 0$.

c) **(1,5 pts.)** Demuestre que, para todo $x > 0$, se cumple que $\arctan(x) < x$.

Indicación: Use el teorema del valor medio.

Solución

Sea $x > 0$. Siguiendo la indicación, usaremos el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$. En efecto, \arctan es conocidamente continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$.

(0,5 pts. por justificar las hipótesis del teorema del valor medio)

Así, existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(\xi)$$

(0,5 pts. por usar el teorema del valor medio)

De aquí deducimos que

$$\frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

(0,4 pts. por usar que $\arctan'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$)

Esta última cantidad es estrictamente menor que 1, así que

$$\frac{\arctan(x)}{x} < 1.$$

(0,1 pts. por notar que $\frac{1}{1 + \xi^2} < 1$)

Al reordenar los términos, se obtiene el resultado buscado.