



### Pauta de corrección Control 1 (Parte A)

P1. a) (3,0 pts.) Considere la siguiente cadena de igualdades, donde  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$(1 - x)y + yx = (1 \cdot y + (-x)y) + yx \tag{1}$$

$$= (y + -(xy)) + yx \tag{2}$$

$$= y + (-xy + yx) \tag{3}$$

$$= y + (-xy + xy) \tag{4}$$

$$= y + 0 \tag{5}$$

$$= y. \tag{6}$$

Para cada uno de los seis pasos de esta cadena de igualdades, indique los axiomas o las propiedades de  $\mathbb{R}$  que justifica la igualdad. Complete para ello la siguiente tabla:

Igualdad	Axiomas/Propiedades
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

#### Solución

La justificación de cada igualdad es la siguiente:

Igualdad	Axiomas/Propiedades utilizadas
(1)	Axioma 3: distributividad de la multiplicación respecto de la suma.
(2)	Axioma 4: existencia de neutro multiplicativo.
(3)	Axioma 2: asociatividad de la suma.
(4)	Axioma 1: conmutatividad de la multiplicación.
(5)	Axioma 5: existencia de inverso aditivo.
(6)	Axioma 4: existencia de neutro aditivo.

(0,5 pts. por identificar correctamente el axioma utilizado en cada igualdad.)

b) (3,0 pts.) Utilizando únicamente los axiomas de cuerpo y la unicidad de los elementos neutros e inversos, demuestre que, si  $a, b \neq 0$  y  $ab \neq 0$ , entonces

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

#### Solución

Bajo la hipótesis  $ab \neq 0$ , el elemento  $ab$  tiene inverso multiplicativo. Demostraremos que  $a^{-1}b^{-1}$  es precisamente dicho inverso. En efecto,

$$\begin{aligned}
(ab)(a^{-1}b^{-1}) &= (ab)(b^{-1}a^{-1}) && \text{(Ax. 1: conmutatividad del producto)} \\
&= a(b(b^{-1}a^{-1})) && \text{(Ax. 2: asociatividad del producto)} \\
&= a((bb^{-1})a^{-1}) && \text{(Ax. 2: asociatividad del producto)} \\
&= a(1 \cdot a^{-1}) && \text{(Ax. 5: inverso multiplicativo)} \\
&= aa^{-1} && \text{(Ax. 4: neutro multiplicativo)}
\end{aligned}$$

$$= 1$$

(Ax. 5: inverso multiplicativo).

Por lo tanto,  $a^{-1}b^{-1}$  es un inverso multiplicativo de  $ab$ .

**(2,5 pts. por demostrar correctamente que  $a^{-1}b^{-1}$  es un inverso multiplicativo de  $ab$ .)**

Como  $ab \neq 0$ , el inverso multiplicativo de  $ab$  existe y es único. En consecuencia,

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

**(0,5 pts. por concluir correctamente la igualdad usando la unicidad del inverso multiplicativo.)**

**P2. (6,0 pts.)** Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 + 3x}{|x - 5| + 4} \geq 3.$$

### Solución

Analizamos la inecuación por casos, según el signo de  $x - 5$ , para eliminar el valor absoluto.

- **Caso 1:  $x \geq 5$ .** En este caso,  $x - 5 \geq 0$ , luego

$$|x - 5| = x - 5.$$

Así, la inecuación queda

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{(x - 5) + 4} \geq 3 &\iff \frac{x^2 + 3x}{x - 1} \geq 3 \\ &\iff \frac{x^2 + 3x - 3(x - 1)}{x - 1} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 3}{x - 1} \geq 0. \end{aligned}$$

Como  $x^2 + 3 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , el signo de la fracción queda determinado por el denominador  $x - 1$ . Por tanto,

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1} \geq 0 \iff x > 1.$$

Al intersectar con la condición  $x \geq 5$ , se obtiene

$$S_1 = [5, +\infty).$$

**(2,5 pts. por plantear correctamente el caso  $x \geq 5$ , simplificar y obtener el conjunto solución.)**

- **Caso 2:  $x < 5$ .** En este caso,  $x - 5 < 0$ , luego

$$|x - 5| = 5 - x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{5 - x + 4} \geq 3 &\iff \frac{x^2 + 3x}{9 - x} \geq 3 \\ &\iff \frac{x^2 + 3x - 3(9 - x)}{9 - x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 6x - 27}{9 - x} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x + 9)(x - 3)}{9 - x} \geq 0. \end{aligned}$$

Analizamos el signo de esta expresión usando los puntos críticos  $-9$ ,  $3$  y  $9$ :

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, 9)$	$(9, \infty)$
$(x + 9)$	-	+	+	+
$(x - 3)$	-	-	+	+
$(9 - x)$	+	+	+	-
$\frac{(x + 9)(x - 3)}{9 - x}$	+	-	+	-

De la tabla de signos se obtiene

$$\frac{(x+9)(x-3)}{9-x} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -9] \cup [3, 9).$$

Al intersectar con la condición  $x < 5$ , resulta

$$S_2 = (-\infty, -9] \cup [3, 5).$$

**(2,5 pts. por plantear correctamente el caso  $x < 5$ , factorizar, y obtener el conjunto solución.)**

Finalmente, la solución de la inecuación original es

$$S = S_1 \cup S_2 = [5, +\infty) \cup ((-\infty, -9] \cup [3, 5)) = (-\infty, -9] \cup [3, +\infty).$$

**(1,0 pto. por combinar correctamente ambos casos y expresar el conjunto solución final.)**

#### Alternativa

Notar que el denominador  $|x-5|+4$  es siempre estrictamente positivo, por lo que se puede multiplicar la inecuación por esta expresión sin cambiar el sentido de la desigualdad. Así,

$$\frac{x^2+3x}{|x-5|+4} \geq 3 \iff x^2+3x \geq 3(|x-5|+4),$$

y luego se procede nuevamente por casos según el signo de  $x-5$ .

**P3.** a) **(1,5 pts.)** Sea

$$A = (0, 1) \cup (2, 3].$$

Determine, sin justificar su respuesta, si el conjunto  $A$  tiene máximo, mínimo, supremo e ínfimo. En caso de existir, indique sus valores.

#### Solución

$$\text{máx}(A) = \text{sup}(A) = 3, \quad \text{ínf}(A) = 0, \quad \text{mín}(A) \text{ no existe.}$$

**(0,5 pts. por identificar correctamente el supremo y el máximo de  $A$ .)**

**(0,5 pts. por identificar correctamente el ínfimo de  $A$ .)**

**(0,5 pts. por concluir correctamente que  $A$  no tiene mínimo.)**

b) **(4,5 pts.)** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto acotado inferiormente, y sea  $B \subseteq A$  un subconjunto no vacío. Demuestre que  $A$  y  $B$  tienen ínfimo y que, además,

$$\text{ínf}(A) \leq \text{ínf}(B).$$

#### Solución

Como todo elemento de  $B$  es un elemento de  $A$ , entonces  $A$  es no vacío.  $A$  es no vacío y acotado inferiormente, por lo tanto, tiene ínfimo  $\text{ínf}(A)$

**(1,5 pts. por justificar correctamente que  $A$  tiene ínfimo.)**

Ahora, como  $B \subseteq A$ , se tiene que para todo  $b \in B$ , también  $b \in A$ . Luego, por definición de ínfimo de  $A$ ,

$$\text{ínf}(A) \leq b \quad \text{para todo } b \in B.$$

Por lo tanto,  $\text{ínf}(A)$  es una cota inferior de  $B$ . En consecuencia,  $B$  está acotado inferiormente. Como además  $B$  es no vacío, nuevamente por axioma del supremo de  $\mathbb{R}$ , el conjunto  $B$  tiene ínfimo, que denotamos por  $\text{ínf}(B)$ .

**(1,5 pts. por demostrar correctamente que  $B$  tiene ínfimo.)**

Finalmente, como  $\text{ínf}(A)$  es una cota inferior de  $B$ , y  $\text{ínf}(B)$  es la mayor de las cotas inferiores de  $B$ , se concluye que

$$\text{ínf}(A) \leq \text{ínf}(B).$$

**(1,5 pts. por concluir correctamente que  $\text{ínf}(A) \leq \text{ínf}(B)$  usando la definición de ínfimo.)**