Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101: Introducción al Álgebra. 2026-Otoño

Control 1

P1. a) i) **(1.5 puntos)** Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre sin usar tabla de verdad que la siguiente proposición es una contradicción

$$\overline{(p \vee \overline{(p \wedge q)})} \wedge r.$$

.

ii) **(1.5 puntos)** Niegue la siguiente proposición "Si recuerdo la letra, entonces cantaré la canción."

b) Considere las variables $x, y, z \in \mathbb{Z}$, es decir que son enteros, y la función proposicional:

$$P(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2.$$

Escriba la negación de las siguientes proposiciones. Luego, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones originales. En caso de ser cierta demuéstrela y en caso de ser falsas demuestren su negación.

i) **(1.5 puntos)** $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z},\ P(x, y, z)$.

ii) **(1.5 puntos)** $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \exists z \in \mathbb{Z},\ P(x, y, z)$.

P2. a) **(3 puntos)** Demuestre usando inducción que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n^3}{3} \leq 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 \leq n^3.$$

Indicación: Recuerde que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3. \tag{1}$$

b) Se define la función proposicional $P(\cdot)$ por recurrencia

$$P(n) : \begin{cases} V & \text{si } n = 0, \\ P(n-1) \implies F & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Adicionalmente, se define $Q(n)$: "n es par".

i) **(1 punto)** Determine el valor de verdad de $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ y $P(4)$.

ii) **(2 puntos)** Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \iff Q(n)$.

Recuerde que se puede usar todo resultado visto en clases, auxiliares o que aparezca en el apunte. Cualquier fórmula (excepto (1)) que quiera usar y que no se haya visto en estos contextos, debe ser demostrada.
No olvide justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.