Control 1

Profesores: C. Conca, J. Ortega & J. Ramírez
Fecha: Jueves 16 de Abril de 2026

P1. Considere un campo escalar radial

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ \vec{r} = (x, y, z) &\mapsto f(r), \end{aligned}$$

donde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Suponga que f es suficientemente diferenciable, continuamente.

a) **(0.5 pts.)** Obtenga una expresión para el gradiente ∇f.

b) **(1.0 pts.)** Obtenga una expresión para el laplaciano Δf.

c) **(0.5 pts.)** Verifique que si $f(r) = \dfrac{1}{r}$, entonces $\Delta f = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

d) **(1.0 pts.)** Demuestre que para todo $n \geq 1$,

$$\nabla\big(r^n\big) = nr^{\,n-2}\,\vec{r}.$$

e) **(1.5 pts.)** Calcule el rotacional

$$\nabla \times \big(f(r)\,\vec{r}\big).$$

f) **(1.5 pts.)** Sea $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ fijo. Considere $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$. Demuestre que

$$\nabla \times \vec{v} = 2\vec{w}.$$

P2. *a*) **(2.0 pts.)** Sea

$$\vec{F}(x, y) = (2x + y^2)\hat{\imath} + (3y - 4x)\hat{\jmath}.$$

Calcule la integral $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva dada por la lenteja formada en el primer cuadrante por las ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$.

b) Considere el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y\arctan(z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x\arctan(z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

1) **(1.0 pts.)** Muestre (justificando apropiadamente) que el campo $\vec{F}$ se escribe en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan(z^2)\hat{\theta} + z\hat{k}$$

Indicación: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$ y $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$

2) **(1.0 pts.)** Calcule $\operatorname{div}(\vec{F})$.

3) **(1.5 pts.)** Si Γ es la circunferencia que resulta de intersectar la esfera centrada en el origen y radio R con el plano $z = H$ (con $|H| < R$), calcule la integral de trabajo $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

4) **(0.5 pts.)** ¿Es $\vec{F}$ un campo conservativo? Justifique su respuesta.

P3. Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt) \qquad t \in [0, 2\pi],$$

donde $a, b > 0$, y el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (-y,\ x,\ z).$$

(a) **(2.0 pts.)** Verifique que Γ es una curva regular y calcule su longitud en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(b) **(2.0 pts.)** Calcule la integral de línea

$$\int_\Gamma z\, ds.$$

(c) **(2.0 pts.)** Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de Γ, es decir,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Tiempo: 3:00 horas

Formulario:

- $\nabla f = \dfrac{1}{h_u}\dfrac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \dfrac{1}{h_v}\dfrac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left[\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{\imath} + \left[\dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{\jmath} + \left[\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right]\hat{k}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = \dfrac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix} = \begin{array}{lll} \frac{1}{h_v h_w} & \left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v\, h_v\,)\right] & \hat{u} \\ +\frac{1}{h_w h_u} & \left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right] & \hat{v} \\ +\frac{1}{h_u h_v} & \left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_u\, h_u\,)\right] & \hat{w} \end{array}$
- $\mathrm{div}\, \vec{F} = \dfrac{1}{h_u h_v h_w}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \dfrac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \dfrac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$