



### Control 1

**P1.** Sean  $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  funciones continuas en  $[0, 1]$  y derivables en  $(0, 1)$ . Supongamos que  $f(0) = f(1) = 0$  y que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (0, 1)$ . Además, supongamos que  $g(x) > 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

Sea  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

- a) **(3,0 pts.)** Justifique que  $h$  alcanza su máximo en un punto del intervalo  $(0, 1)$ .
- b) **(3,0 pts.)** Concluya que existe  $\bar{x} \in (0, 1)$  tal que  $f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x}) = 0$ .

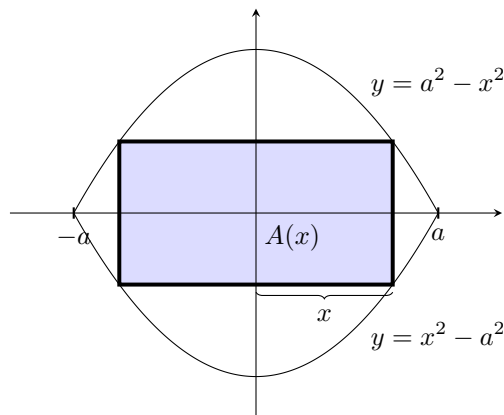
**P2.** a) **(3,0 pts.)** Sean  $a \geq 2$  y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Demuestre que el polinomio  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $P(x) = x^n - ax + 1$  tiene una raíz en el intervalo  $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ .

b) **(3,0 pts.)** Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin^3(x)}.$$

**P3.** a) Sea  $a > 0$ . Considere las funciones  $f, g: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x^2 - a^2$  y  $g(x) = a^2 - x^2$ . El objetivo de este problema es encontrar el área del mayor rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados que puede inscribirse entre los grafos de  $f$  y  $g$ .

- i) **(1,0 pts.)** Sea  $A: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  la función que asigna, a cada  $x \in [0, a]$ , el área del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados que queda inscrito entre los grafos de  $f$  y  $g$ , y cuyo lado derecho tiene coordenada horizontal  $x$ , como muestra la figura. Encuentre una expresión explícita para  $A(x)$  en función de  $x$ .



- ii) **(2,0 pts.)** Suponga, sin demostración, que existe un  $\bar{x} \in (0, a)$  donde la función  $A$  alcanza su máximo. Encuentre el valor de  $\bar{x}$  y calcule el área del rectángulo correspondiente.

b) **(1,5 pts.)** Considere la función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Determine si  $h$  es continua en  $\bar{x} = 0$ , justificando su respuesta con una demostración completa.

c) **(1,5 pts.)** Demuestre que, para todo  $x > 0$ , se cumple que  $\arctan(x) < x$ .

Indicación: Use el teorema del valor medio.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.