



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Tutorías y Guías del Curso

Semestre primavera 2025

Índice general

1.	Subsucesiones y Continuidad	1
1.1.	Subsucesiones	1
1.2.	Funciones continuas	2
2.	Continuidad. Los grandes teoremas	11
2.1.	El teorema de los valores intermedios	11
2.2.	Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass	13
2.3.	Continuidad de las funciones inversas	14
2.4.	Continuidad uniforme	15
3.	Derivadas	21
3.1.	Funciones derivables	21
3.2.	Reglas de cálculo de derivadas	24
4.	Derivadas: Los teoremas	32
4.1.	Máximos y mínimos: la regla de Fermat	32
4.2.	El teorema del valor medio	34
4.3.	Algunas aplicaciones de la derivada	35
4.4.	Derivadas y monotonía	38
4.5.	Derivadas y convexidad	39
5.	Derivadas de mayor orden	42
5.1.	Derivadas de orden superior	42
5.2.	Desarrollos limitados	42
5.3.	Caracterización de puntos críticos	46
5.4.	Fórmula de Taylor	46
5.5.	El método de Newton	47
6.	Primitivas	54
6.1.	Primitivas o integrales indefinidas inmediatas	54
6.2.	Teorema de cambio de variable	56
6.3.	Integración por partes	57
6.4.	Sustituciones trigonométricas tradicionales	59
6.5.	Integración de funciones racionales	59
6.6.	Primitivas de funciones trigonométricas reducibles a primitivas de funciones racionales	61
7.	Integral de Riemann	67
7.1.	Introducción	67
7.2.	Condiciones básicas para una definición de área	67
7.3.	Integración de funciones escalonadas	72
7.4.	Propiedades de la integral de funciones escalonadas.	75
7.5.	Funciones Riemann integrables	77

8.	Funciones Riemann Integrables	80
8.1.	Propiedades de la Integral	83
8.2.	Integral de a a b con $a \geq b$	87
9.	Teorema Fundamental del Cálculo	91
9.1.	Teorema Fundamental del Cálculo	91
9.2.	Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales.	96
10.	Aplicación de la Integral de Riemann	101
10.1.	Cálculo de Areas	101
10.2.	Volúmenes de Sólidos	104
10.3.	Calcule de un sólido de revolución	106
11.	Aplicaciones de la Integral (2)	111
11.1.	Longitud de un Arco de Curva (Rectificación)	111
11.2.	Superficie del Manto de un Sólido de Revolución	112
11.3.	Coordenadas Polares	113
11.4.	Centro de Gravedad de una Superficie Plana	115
12.	Integrales Impropias	120
12.1.	Introducción	120
12.2.	Algunos criterios de convergencia para integrales impropias	123
12.3.	Convergencia absoluta	125
13.	Series numéricas	129
13.1.	Definición y ejemplos básicos	129
13.2.	Condiciones para la convergencia	130
13.3.	Álgebra de series	131
13.4.	Criterios para analizar convergencia de series de términos no negativos	131
13.5.	Series de signo arbitrario	136
13.6.	Criterio de Leibniz	137
13.7.	Multiplicación de series	138
14.	Series de potencias	142
14.1.	Radio e intervalo de convergencia	142
14.2.	Series de potencias, integración y derivación	143
14.3.	Álgebra de series de potencias	147



Subsucesiones y Continuidad

1.1 Subsucesiones

DEFINICIÓN (SUBSUCESIÓN) Sea (s_n) una sucesión. Sea $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ , a la sucesión (u_n) , definida por:

$$u_n = s_{\varphi(n)}.$$

Ejemplo 1.1.

- Si $\varphi(n) = 2n$, entonces $u_n = s_{2n}$. $(u_n) = (s_0, s_2, s_4, s_6, s_8 \dots)$.
 - Si $\varphi(n) = 2n + 1$, entonces $u_n = s_{2n+1}$. $(u_n) = (s_1, s_3, s_5, s_7, \dots)$.
- En general, $(u_n) = (s_{\varphi(n)}) = (s_{\varphi(0)}, s_{\varphi(1)}, s_{\varphi(2)}, \dots)$.

Observación: Aceptaremos que la función φ no este definida para un número finito de términos. Por ejemplo, si $\varphi(n) = n - 5$, tenemos que (s_{n-5}) solo está definida para $n \geq 5$, y no lo está para $n = 1, 2, 3, 4$.

El siguiente teorema caracteriza la convergencia de una sucesión vía la de sus subsucesiones, mostrando que además éstas no pueden tener un límite distinto al de la original.

Teorema 1.1. Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \rightarrow \ell \quad \text{si y solo si} \quad \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } \ell.$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Basta tomar $\varphi(n) = n$, con lo que $s_{\varphi(n)} = s_n \rightarrow \ell$.

($\Rightarrow$) Sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, estrictamente creciente y eventualmente no definida en un número finito de casos. P.d.q. $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, |s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. Efectivamente, como φ no es acotada superiormente (¿por qué?), $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \varphi(k_0) \geq n_0$. Y luego:

$$\forall k \geq k_0, \varphi(k) \geq \varphi(k_0) \geq n_0,$$

de donde $\forall k \geq k_0, |s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. □

Teorema 1.2 (Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se realiza mediante un método de *dicotomía*.

Sea (s_n) una sucesión acotada. Existen entonces $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq s_n \leq b_0.$$

Llamemos $I_0 = [a_0, b_0]$.

Sea a continuación $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Es claro que en alguno de los intervalos $[a_0, c_0]$ y $[c_0, b_0]$, hay una infinidad de términos de la sucesión (s_n) . Llamemos $I_1 = [a_1, b_1]$ a dicho intervalo.

Definimos entonces $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Nuevamente, debe haber una infinidad de términos de (s_n) en alguno de los intervalos $[a_1, c_1]$ y $[c_1, b_1]$. Llamamos a dicho intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ y proseguimos de la misma manera.

Así, se formará una colección de intervalos $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$ con las siguientes propiedades:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, el intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ contiene una cantidad infinita de términos de la sucesión (s_n) .
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \supseteq I_{n+1}$. Cuando esta condición se satisface, se habla de una colección de intervalos *encajonados*.

Definamos entonces la siguiente subsucesión de (s_n) (denotada $(s_{\varphi(n)})$):

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid s_k \in I_1\} \\ \varphi(2) &= \min\{k > \varphi(1) \mid s_k \in I_2\} \\ \varphi(3) &= \min\{k > \varphi(2) \mid s_k \in I_3\} \\ \varphi(n+1) &= \min\{k > \varphi(n) \mid s_k \in I_{n+1}\}.\end{aligned}$$

Con esto la subsucesión $(s_{\varphi(n)})$ tiene la siguiente propiedad:

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{\varphi(n)} \in I_n, \text{ o sea, } a_n \leq s_{\varphi(n)} \leq b_n. \quad (1.1)$$

Finalmente, es claro que las sucesiones (a_n) y (b_n) son monótonas ($a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$) y acotadas ($a_n, b_n \in [a_0, b_0]$), luego convergen a los reales a y b , respectivamente. Además como $a_n \leq b_n$, entonces $a \leq b$.

Por último, ya que $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, entonces tomando límite se tiene que $b - a = 0$ o sea, $a = b$. Luego, aplicando sandwich en la desigualdad de (1.1), se obtiene que $s_{\varphi(n)} \rightarrow a = b$. $\square$

1.2 Funciones continuas

Sabemos, del semestre anterior, que si tenemos una sucesión $s_n \rightarrow \bar{x}$, entonces $\sin(s_n) \rightarrow \sin(\bar{x})$. Es decir, la función seno satisface la siguiente propiedad:

$$s_n \rightarrow \bar{x} \implies f(s_n) \rightarrow f(\bar{x}).$$

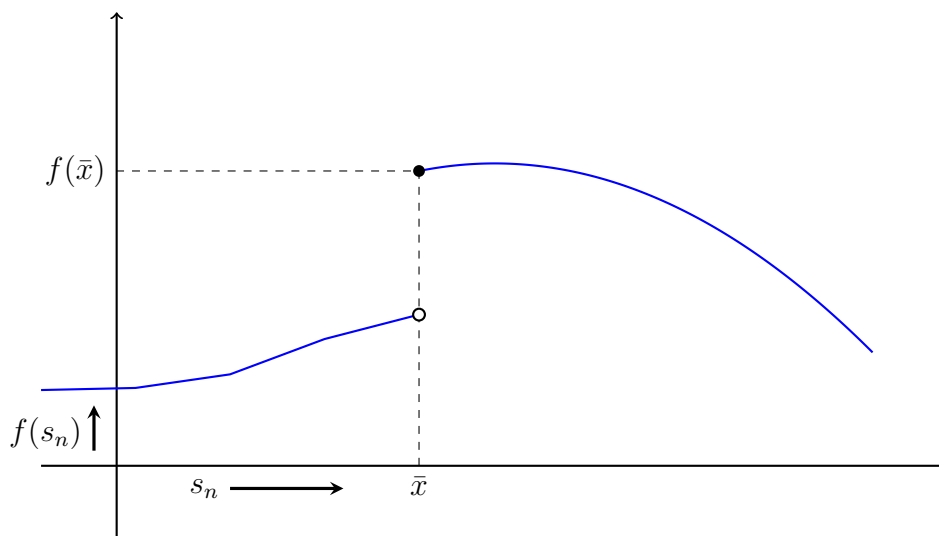


Figura 1: Para esta función f y la sucesión (s_n) , $s_n \rightarrow \bar{x}$ pero $f(s_n) \not\rightarrow f(\bar{x})$.

Pero, ¿se tiene esta propiedad para cualquier función? Veamos la Figura 1.

En la función dibujada, si uno toma cualquier sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la derecha, la sucesión de las imágenes $f(s_n)$ converge sin problemas al valor $f(\bar{x})$. Sin embargo, al tomar una sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la izquierda, se tiene que la sucesión $f(s_n)$ converge a un valor $h < f(\bar{x})$.

La intuición nos dice que este fenómeno está relacionado de algún modo con el “salto” o *discontinuidad* que la función f posee. Formalicemos esto vía la siguiente definición.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función **función continua en $\bar{x}$** si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x}).$$

Observación: Notemos que en la definición, la propiedad de ser verificada **para toda sucesión** que converge a $\bar{x}$ y con valores en A . Es decir, si somos capaces de probar que la propiedad es válida para alguna sucesión, eso no es suficiente para que la función sea continua.

Sin embargo, los valores de la sucesión deben estar en el dominio de la función, luego si el dominio es reducido, entonces el número de sucesiones test es pequeña.

Ejercicio 1.1: ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1, para que fuere continua en $\bar{x}$?

Ejemplo 1.2.

Consideremos la función f definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Probemos que f es continua en $\bar{x} = 0$ y en $\bar{x} = 1$.
2. Probemos que f no es continua en $\bar{x}$ si $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Solución.

1. Consideremos el caso $\bar{x} = 0$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 0.

$$\text{P.D.Q: } f(x_n) \rightarrow f(0) = 0.$$

En efecto, se tiene que

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde se puede realizar el acotamiento siguiente:

$$0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n| + x_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando esta mayoración y el teorema del sandwich de sucesiones se obtiene el resultado buscado.

Ahora consideremos el caso $\bar{x} = 1$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 1.

$$\text{P.D.Q: } f(x_n) \rightarrow f(1) = 1.$$

En efecto, se tiene que

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$|f(x_n) - 1| = \begin{cases} |x_n - 1| & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ |x_n^2 - 1| & \text{si } x_n \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por lo tanto, usando un acotamiento similar al del caso anterior, se obtiene:

$$0 \leq |f(x_n) - 1| \leq |x_n - 1| + |x_n^2 - 1|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

El resultado buscado es nuevamente una consecuencia directa de esta mayoración y del teorema del sandwich de sucesiones.

2. Consideremos el caso $\bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$. En este caso se tiene que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Para demostrar que la función no es continua en este punto, debemos mostrar alguna sucesión (x_n) que converja a $\bar{x}$ pero para la cual se tenga que $f(x_n) \not\rightarrow \bar{x}$.

Dada la fórmula de la función f , esto último lo hacemos con una sucesión de números irracionales.

Sea $x_n = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Claramente esta sucesión converge a $\bar{x}$. Sin embargo, la sucesión de las imágenes

$$f(x_n) = \left(\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)^2 \rightarrow \bar{x}^2$$

y como $\bar{x} \notin \{0, 1\}$ se tiene que $\bar{x}^2 \neq \bar{x}$.

El caso $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$ se propone como ejercicio. Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$. $\square$

Ejemplo 1.3.

No es difícil probar que las siguientes funciones son continuas:

- $f(x) = c$ (constante) es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \ln(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

Las demostraciones se proponen como ejercicios personales de comprensión.

Teorema 1.3 (Álgebra de funciones continuas). Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:

1. $f + g$.
2. $f - g$.
3. λf , con $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $f \cdot g$.
5. f/g , cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la continuidad solo para 1 y 5, el resto se proponen como ejercicios. Para 1, debemos probar que si (x_n) es una sucesión en $\text{Dom}(f + g) = A \cap B$ que converge a $\bar{x}$, entonces $(f + g)(x_n)$ converge a $(f + g)(\bar{x})$.

Esto último es cierto ya que $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$. Pero como f y g son continuas en $\bar{x}$, entonces $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ y $g(x_n) \rightarrow g(\bar{x})$, y por el teorema de álgebra de sucesiones

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f + g)(\bar{x}).$$

Para 5, sea (x_n) una sucesión con valores en $\text{Dom}(f/g) = (A \cap B) \setminus Z(g)$ ($Z(g)$ es el conjunto de ceros de g), que converge a $\bar{x}$.

Nuevamente, por continuidad de f y g , $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ y $g(x_n) \rightarrow g(\bar{x})$ y usando el teorema de álgebra de sucesiones, resulta:

$$(f/g)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = (f/g)(\bar{x}).$$

□

Teorema 1.4 (Composición de funciones continuas). Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea (x_n) una sucesión con valores en $\text{Dom}(g \circ f)$ que converge a $\bar{x}$.

Recordemos que $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\}$. Con esto, como $x_n \in \text{Dom}(g \circ f)$, se tiene que $x_n \in \text{Dom}(f)$ y $f(x_n) \in \text{Dom}(g)$.

Por un lado, tenemos que, $x_n \in \text{Dom}(f)$ y $x_n \rightarrow \bar{x}$. Luego, usando la continuidad de f en $\bar{x}$ se concluye que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$.

Ahora, tenemos que la sucesión $(f(x_n))$ cumple que $f(x_n) \in \text{Dom}(g)$ y $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Luego, por continuidad de g en $f(\bar{x})$, se deduce que

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(\bar{x})) = (g \circ f)(\bar{x}).$$

□

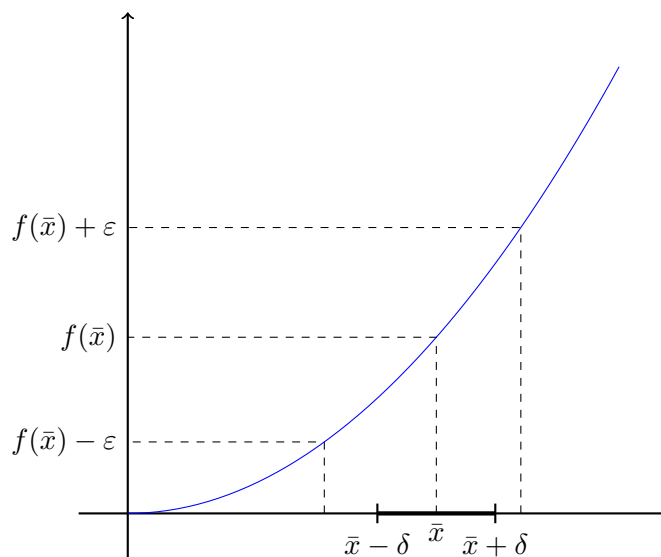
Ejemplo 1.4.

Gracias a los teoremas anteriores, se concluye que las siguientes funciones son continuas (pruébelo):

1. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \text{Dom}(f)$.
3. $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
5. $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
6. $f(x) = x^{x^{\cdots^x}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
7. $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.5 (Caracterización ε - δ). Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \left\{ |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \right\} \quad (1.2)$$



DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Razonemos por contradicción. Si la propiedad fuese falsa, significaría que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $x \in A$ con $|x - \bar{x}| \leq \delta$ y $|f(x) - f(\bar{x})| > \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y encontrar $x_n \in A$ que cumple las propiedades

$$|x_n - \bar{x}| \leq 1/n \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(\bar{x})| > \epsilon.$$

Claramente la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $\bar{x}$ y sin embargo $f(x_n) \not\rightarrow f(\bar{x})$ lo cual contradice la continuidad de f en $\bar{x}$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que la propiedad es cierta y probemos la continuidad. Tomemos una sucesión cualquiera (x_n) con valores en A , tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$. Debemos probar que $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Para ello consideremos $\epsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta > 0$ dado por la propiedad. Dado que $x_n \rightarrow \bar{x}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \bar{x}| \leq \delta$ para todo $n \geq n_0$. Usando la propiedad, se sigue que $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \epsilon$ para $n \geq n_0$ con lo cual $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. $\square$

Observación: Esta propiedad permite entre otras cosas, hacer la conexión entre los conceptos de continuidad y límite de funciones. En efecto, las caracterizaciones $\epsilon - \delta$ de ambos conceptos son prácticamente los mismos, cambiando ℓ por $f(\bar{x})$ y autorizando a la variable x a tomar el valor $\bar{x}$.

De este modo podemos establecer que si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

DEFINICIÓN (FUNCIÓN CONTINUA) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

Guía de Ejercicios

1. ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1 de la tutoría, para que sea continua en $\bar{x}$?
2. Dadas $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Pruebe que las funciones $f - g$, λf (con $\lambda \in \mathbb{R}$) y $f \cdot g$ son continuas en $\bar{x}$.
3. Usando los teoremas de álgebra y composición de funciones continuas, pruebe que las siguientes funciones son continuas:

- a) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- b) $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \text{Dom}(f)$.
- c) $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- d) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
- e) $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
- f) $f(x) = x^{x^{\cdots^x}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
- g) $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Consideremos la función f definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Termine el ejemplo de la tutoría, probando que f no es continua en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$. Recuerde la indicación: Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$.

5. Pruebe que la función $f(x) = x \sin(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
6. Determine el valor que debemos dar a $f(0)$ para que $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ sea continua en $\bar{x} = 0$.
7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = \alpha$. Demuestre que independiente del valor de α , f no es continua en 0.
8. Estudie la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Analice por separado los casos $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} \neq 0$.
9. Pruebe que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es continua en $\mathbb{R}$.
10. Determine el dominio y puntos de continuidad de las siguientes funciones

- (a) $x \mapsto \sin(x)/\ln(1 + \exp(x))$
- (b) $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1 + x^3)}$
- (c) $x \mapsto \exp(x)x^{3/2}/\tan(x)$

- 11.** Estudie dominio y continuidad de las funciones $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$.
- 12.** (a) Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in A$. Demuestre que la función $h(x) = g(x)^{f(x)}$ está bien definida y es continua en A .
- (b) Estudie la convergencia de la sucesión $y_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)}$.

Guía de Problemas

- P1.** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) < 0$ para todo $x < c$ y $f(x) > 0$ para $x > c$. Demuestre que $f(c) = 0$.
- P2.** Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una tal función se dice Lipschitziana de parámetro L). Pruebe que f es continua en A .
- P3.** Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ una sucesión tal que $r_n \rightarrow 0$. Pruebe que f es continua en $\bar{x}$ si y solamente si la sucesión

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(\bar{x})| : |x - \bar{x}| \leq r_n\},$$

converge a cero.

- P4.** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, p, q primos relativos, y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Pruebe que f es continua en todo punto $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$ y discontinua en todo $\bar{x} \in \mathbb{Q}$.
- P5.** Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $\bar{x} \in \mathbb{R}$, con $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$. Pruebe que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. Indicación: puede ser conveniente analizar primeramente el caso $g \equiv 0$.
- P6.** a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Pruebe que
- (a) si $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.
 - (b) si $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = a^x$ con $a = f(1)$.
- b) Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in (0, \infty)$. Demuestre que $f(x) = \log_a(x)$ con $a = f^{-1}(1)$.



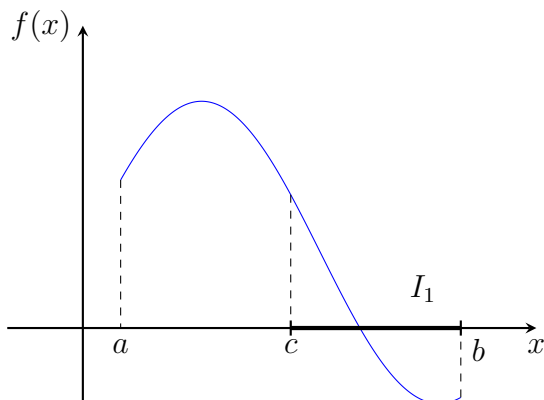
Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Una propiedad muy útil para estudiar el recorrido de una función continua de un intervalo, es el hecho que una tal función que toma un par de valores, está obligada a tomar todos los valores intermedios. La esencia de esta propiedad la enunciamos en el siguiente resultado de existencia de raíces de ecuaciones.

Teorema 2.1. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*

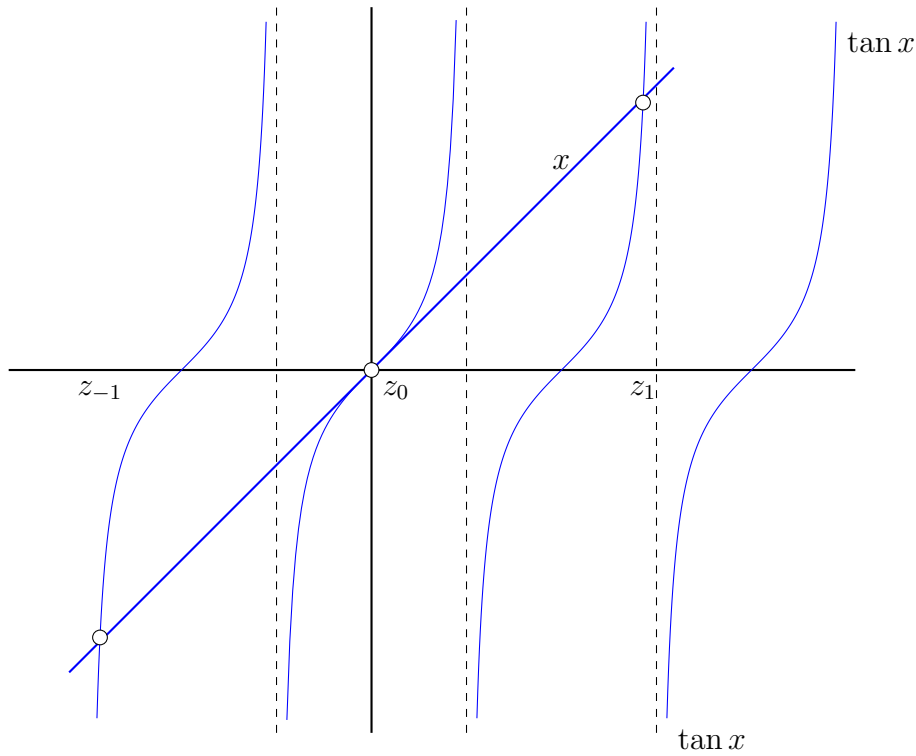
DEMOSTRACIÓN. Consideremos el intervalo $I_0 = [a, b]$ y $c = (a + b)/2$ su punto medio.



Tomando $I_1 = [a, c]$ si $f(a)f(c) \leq 0$ o $I_1 = [c, b]$ si $f(c)f(b) \leq 0$, obtenemos un intervalo $I_1 = [a_1, b_1] \subseteq I_0$ con $f(a_1)f(b_1) \leq 0$ y largo $(b_1 - a_1) = (b - a)/2$. Iterando este procedimiento se obtiene una sucesión decreciente de intervalos $I_n = [a_n, b_n] \subseteq I_{n-1}$ tal que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ y $(b_n - a_n) = (b - a)/2^n$. Por el Teorema de Intervalos Encajonados, las sucesiones a_n y b_n convergen hacia un mismo punto $\bar{x} \in [a, b]$, y pasando al límite en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ se deduce $f(\bar{x})^2 \leq 0$, es decir $f(\bar{x}) = 0$. $\square$

Ejemplo 2.1.

Estudiemos las soluciones de la ecuación $\tan(x) = x$. Gráficamente, se trata de encontrar las intersecciones de los gráficos de las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ y, como muestra la siguiente figura, resulta intuitivo que la ecuación tiene infinitas soluciones $\cdots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 = 0 < z_1 < z_2 < \cdots$.



Como las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ son impares, es claro que si z es una solución de la ecuación, entonces $-z$ también. En el gráfico esto corresponde al hecho que $z_{-1} = -z_1, z_{-2} = -z_2, \dots$. Probemos la existencia de una raíz z_1 en $(\pi/2, 3\pi/2)$. Para ello consideremos la función $f(x) = \tan(x) - x$ y notemos que $f(\pi) = -\pi < 0$. Por otra parte, tomando la sucesión $x_n = 3\pi/2 - 1/n$ se observa que $f(x_n) \rightarrow +\infty$ de modo que para algún $\bar{n} \in \mathbb{N}$ se tendrá $f(x_{\bar{n}}) > 0$. El teorema anterior nos permite concluir la existencia de un número $z_1 \in [\pi, x_{\bar{n}}]$ tal que $f(z_1) = 0$, esto es $\tan(z_1) = z_1$. Intentemos estimar z_1 con 6 decimales usando el algoritmo sugerido en la demostración del Teorema 2.1. Partamos con $a_0 = 4.4; b_0 = 4.5$ para los cuales se tiene $f(a_0) = -1.30$ y $f(b_0) = 0.14$.

n	$[a_n, b_n]$	$c_n = (a_n + b_n)/2$	$f(c_n)$
0	[4.400000, 4.500000]	4.450000	-7.3e-01
1	[4.450000, 4.500000]	4.475000	-3.4e-01
2	[4.475000, 4.500000]	4.487500	-1.2e-01
3	[4.487500, 4.500000]	4.493750	6.9e-03
4	[4.487500, 4.493750]	4.490625	-5.5e-02
5	[4.490625, 4.493750]	4.492188	-2.5e-02
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	[4.493409, 4.493410]	4.493409	6.6e-07
21	[4.493409, 4.493409]	4.493409	1.8e-07

Así, luego de 21 iteraciones obtenemos la estimación $z_1 \sim 4.49340946674347$ la cual posee al menos 6 decimales exactos. Como ejercicio haga un programa para estimar z_2 con 6 decimales.

Ejemplo 2.2.

Pruebe que todo polinomio cúbico tiene al menos una raíz real. En efecto, sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ con $d \neq 0$ un polinomio cúbico cualquiera. Observemos que $p(n)/n^3 \rightarrow d$ mientras que $p(-n)/n^3 \rightarrow -d$. De aquí se sigue que para n suficientemente grande $p(n)$ tiene el mismo signo que d , mientras que $p(-n)$ tiene el signo contrario. Como consecuencia del teorema anterior el polinomio debe tener una raíz en el intervalo $[-n, n]$. Generalice el argumento para probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. Analice que ocurre en el caso de polinomios de grado par.

Como corolario inmediato del Teorema 2.1 se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 2.2. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d , existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a_0 y b_0 tales que $f(a_0) = c$ y $f(b_0) = d$. Sin perder generalidad podemos suponer $a_0 \leq b_0$. Aplicando el teorema anterior a la función $g: [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - e$ se obtiene la existencia de x tal que $g(x) = 0$, vale decir $f(x) = e$. $\square$

Ejemplo 2.3.

El Teorema 2.2 permite demostrar, por ejemplo, que la imagen de la función $\exp$ es $(0, +\infty)$. En efecto, dado que las sucesiones $\exp(-n)$ y $\exp(n)$ convergen hacia 0 y $+\infty$ respectivamente, cualquiera sea el número real $y > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\exp(-n) < y < \exp(n)$. El teorema de los valores intermedios nos asegura la existencia de $x \in [-n, n]$ tal que $\exp(x) = y$. Por otra parte, como ya sabemos que $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se concluye que $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Recordemos que $\exp$ es estrictamente creciente con lo cual es inyectiva, de modo que $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ es biyectiva. Su inversa, como ya vimos en capítulos anteriores, es la función $\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

En esta sección probaremos otra propiedad importante de las funciones continuas: en un intervalo cerrado y acotado el máximo y el mínimo son alcanzados. Exactamente se tiene:

Teorema 2.3. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos la propiedad del mínimo (la propiedad del máximo se prueba de manera análoga y se deja como ejercicio).

Sea $m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, eventualmente $m = -\infty$. Probaremos que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = m$ lo cual establece simultáneamente que el ínfimo es finito y que es alcanzado. Para ello consideremos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_n)$ converge hacia m . En virtud del Teorema de Weierstrass podemos extraer una subsucesión convergente $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in [a, b]$. Por continuidad se tiene $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$, de donde se deduce que $m = f(\bar{x})$ probando simultáneamente que m es finito (es decir, f es acotada inferiormente) y que el ínfimo es alcanzado (en el punto $\bar{x}$). $\square$

Observemos que en el resultado anterior todas las hipótesis son necesarias. La función $x \mapsto \exp(x)$, si bien tiene un ínfimo finito sobre $\mathbb{R}$, éste no es alcanzado: $\mathbb{R}$ no es acotado. Por otra parte, la función $x \mapsto x^2$ alcanza su mínimo pero no así el máximo en el intervalo $[0, 1)$, el cual no es cerrado. Finalmente, la función definida por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es acotada y no alcanza ni el mínimo ni el máximo en el intervalo $[-1, 1]$. La dificultad en este caso proviene de la falta de continuidad en $\bar{x} = 0$.

2.3 Continuidad de las funciones inversas

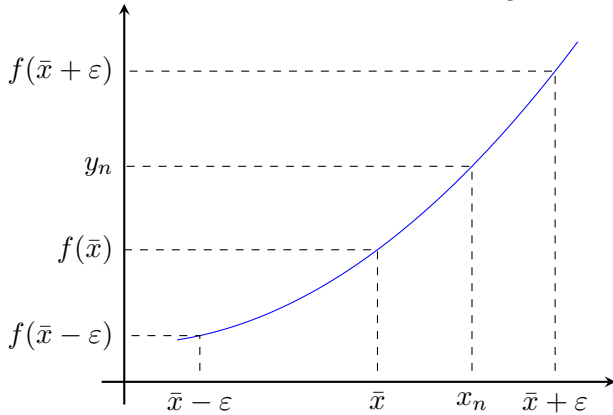
Para finalizar el estudio de las funciones continuas, probaremos un resultado de gran utilidad para establecer la continuidad de una función que es la inversa de una función continua.

Consideremos $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo (finito o infinito, abierto o cerrado o semiabierto) y sea $J = f(I)$ su recorrido. Recordemos que si f es estrictamente monótona (creciente o decreciente) entonces es inyectiva y en consecuencia posee una inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$ (la cual tiene el mismo tipo de monotonía que f). El resultado anunciado es el siguiente:

Teorema 2.4. *Sea $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1}: J \rightarrow I$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. El hecho que J es un intervalo se demuestra usando el Teorema 2.2 (ejercicio). Probemos que f^{-1} es continua en todo punto $\bar{y} \in J$. La demostración se separa en distintos casos según si f es creciente o decreciente, y según si $\bar{y}$ es un extremo del intervalo J o se encuentra en su interior. En todos los casos la idea de la demostración es básicamente la misma, de modo que nos limitaremos a analizar la situación más simple en que f es creciente e $\bar{y}$ se encuentra en el interior del intervalo J .

Sea $\bar{y}_n \in J$ tal que $y_n \rightarrow \bar{y}$. Sea $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ y $x_n = f^{-1}(y_n)$. Notemos que $\bar{x}$ se encuentra en el interior del intervalo I (ejercicio, usar la monotonía de f). Debemos probar que $x_n \rightarrow \bar{x}$, para lo cual usaremos la definición de convergencia.



Sea $\varepsilon > 0$ pequeño tal que $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \subseteq I$. Como $\bar{x} - \varepsilon < \bar{x} < \bar{x} + \varepsilon$, la monotonía de f implica $f(\bar{x} - \varepsilon) < \bar{y} < f(\bar{x} + \varepsilon)$ y, por lo tanto, dado que $y_n \rightarrow \bar{y}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(\bar{x} - \varepsilon) < y_n < f(\bar{x} + \varepsilon)$$

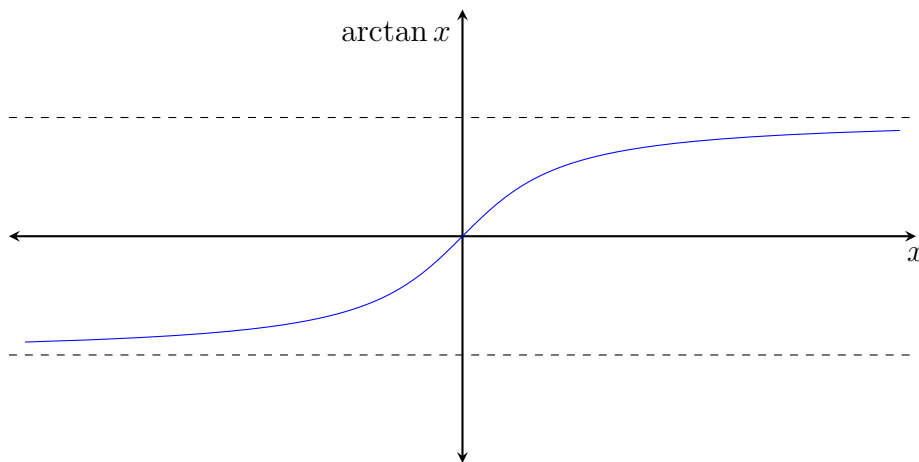
para todo $n \geq n_0$. Como f^{-1} es también creciente, resulta $\bar{x} - \varepsilon < f^{-1}(y_n) < \bar{x} + \varepsilon$, es decir $x_n \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. $\square$

Ejemplo 2.4.

La función $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la inversa de la función $\exp$, y en consecuencia es continua. Esta es una demostración alternativa de la continuidad del logaritmo, que ya habíamos demostrado antes.

Ejemplo 2.5.

La función $x \mapsto \tan(x)$ no es biyectiva. Sin embargo, su restricción al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es continua y estrictamente creciente, con imagen $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. En consecuencia, posee una inversa que resulta ser continua, la cual denotaremos $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$. Aparte de ser continua, esta función es impar, creciente, $\arctan(0) = 0$, y satisface $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir del gráfico de $\tan$ obtenemos un gráfico aproximado para $\arctan$:



Ejemplo 2.6.

La función $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y creciente, con recorrido igual a $[-1, 1]$. Su inversa es en consecuencia continua y creciente. Se denota $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$. Similarmente, $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y decreciente, con recorrido $[-1, 1]$. Su inversa $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ es por lo tanto continua y decreciente.

Ejemplo 2.7.

La función $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y creciente y su recorrido es todo $\mathbb{R}$. Su inversa $\sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es por lo tanto continua y creciente. Del mismo modo, $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y creciente con $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Luego, su inversa $\tanh^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y creciente.

2.4 Continuidad uniforme

A lo largo de este capítulo hemos analizado la noción de continuidad en términos de sucesiones: una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) es continua en el punto $\bar{x} \in A$ si toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge hacia $\bar{x}$ es transformada por f en una sucesión $f(x_n)$ que converge hacia $f(\bar{x})$, es decir

$$(x_n \in A, x_n \rightarrow \bar{x}) \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x}).$$

Vimos además, una caracterización sin usar sucesiones en el Teorema 1.5. Usando dicha caracterización ε - δ , es posible definir un criterio de continuidad más fuerte.

A modo de motivación, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.8.

Ilustremos la caracterización ε - δ en un caso sencillo. Consideremos la función $f(x) = x^3$ y un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Sabemos que f es continua en $\bar{x}$ de modo que se debe tener la propiedad (1.2). Verifiquemos esta última de manera directa. Tomemos $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon.$$

La condición $|x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon$ puede escribirse como $\sqrt[3]{\bar{x}^3 - \varepsilon} \leq x \leq \sqrt[3]{\bar{x}^3 + \varepsilon}$, la cual a su vez es equivalente a (ejercicio)

$$|x - \bar{x}| \leq \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$$

de tal forma que basta tomar $\delta = \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$.

Vale la pena notar que en general δ depende de ε pero también del punto $\bar{x}$ en consideración, vale decir, $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$. En particular en el ejemplo anterior se observa que la cantidad δ se hace más pequeña a medida que se reduce $\varepsilon > 0$ y, asimismo, para un valor fijo de ε se tiene que δ tiende a 0 a medida que $|\bar{x}|$ crece. Esto último no siempre ocurre y para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad (1.2) *independientemente* del punto $\bar{x}$ en consideración.

Ejemplo 2.9.

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$ definida en $[0, \infty)$ y $\bar{x} \geq 0$. Como f es continua en $\bar{x}$ se tiene la propiedad (1.2). Explícitamente, dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \varepsilon.$$

Usando la desigualdad $|\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \sqrt{|x - \bar{x}|}$ (ejercicio) se puede escribir la siguiente secuencia de desigualdades:

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \sqrt{|x - \bar{x}|} \leq \sqrt{\delta},$$

de tal forma que tomando $\delta = \varepsilon^2$, se obtiene la propiedad (1.2). Lo interesante de este cálculo es que δ no depende de $\bar{x}$ y la implicancia

$$(|x - \bar{x}| \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2) \implies |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \varepsilon$$

se satisface independientemente del $\bar{x}$ considerado. Esta propiedad de uniformidad de δ respecto del punto $\bar{x}$ se conoce como *continuidad uniforme*.

DEFINICIÓN La función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) se dice *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

En virtud del Teorema 1.5 es claro que una función uniformemente continua resulta ser continua

en todo su dominio. La recíproca no es cierta en general como lo muestra el Ejemplo 2.8, a menos que el dominio de la función sea un intervalo cerrado y acotado como probamos a continuación.

Teorema 2.5. *Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y solo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar la implicación $\Leftarrow$. Supongamos por contradicción que f es continua en todo punto $\bar{x} \in A$ pero que no es uniformemente continua, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ podemos encontrar puntos $x, y \in A$ tales que $|x - y| \leq \delta$ y $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. En particular, tomando $\delta = 1/n$ encontraremos $x_n, y_n \in A$ tales que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ y $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Ahora bien, puesto que A es acotado podemos extraer una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. Como $a \leq x_n \leq b$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x} \in [a, b]$. En virtud de la desigualdad triangular se sigue que $y_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. Con esto, usando la continuidad de f en el punto $\bar{x}$ obtenemos

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$$

lo que constituye una contradicción con el hecho que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Guía de Ejercicios

1. Pruebe el Teorema de Weierstrass en su versión para máximo. Es decir, dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo en $[a, b]$.
2. Pruebe las propiedades de la función arctan enunciadas en el Ejemplo 1.6.
3. Pruebe que si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo.
4. Pruebe la siguiente variante del Teorema 1.9: si $f: I \rightarrow J$ es estrictamente monótona y biyectiva con I y J intervalos, entonces f y f^{-1} son continuas.
5. Complete los ejemplos 1.9 y 1.10 de la tutoría.
6. Encuentre el recorrido de las funciones

$$f(x) = \ln(2 + \exp(x)) \text{ y } f(x) = \sin((x^2 - 1)/(x^2 + 1)).$$

7. Demuestre que la ecuación $x \sin(x) = 2$ posee infinitas soluciones. Haga un programa para estimar una solución positiva de esta ecuación, con al menos 6 decimales de precisión.
8. Demuestre que la ecuación $\exp(x) \cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.
Indicación: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ para aplicar el teorema del valor intermedio.
9. Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.
10. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ un polinomio de grado n , tal que $c_0 c_n < 0$. Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

(a) Pruebe que existen $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}) \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in [a, b].$$

(b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

P2. Dado $a > 0$, sea $f: [0, 2a] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \bar{x} \in [0, a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$.

P3. Definimos la función en $\mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Verifique que $\tanh$ es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que si $n \rightarrow \infty$ entonces $\tanh(n) \rightarrow 1$ y que $\tanh(-n) \rightarrow -1$.

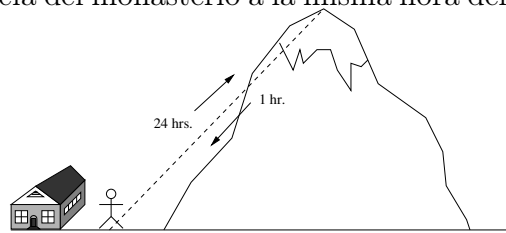
(c) Usando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que $\forall y \in (-1, 1), \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.

Indicación: analice separadamente los casos $y > 0, y = 0, y < 0$.

(d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

P4. Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las 00:00 hrs., el monje comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez ahí, medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en

los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del día.



P5. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

P6. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Demuestre que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = -(x - b)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$.

P7. (a) Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(b) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x) < G(x)$.

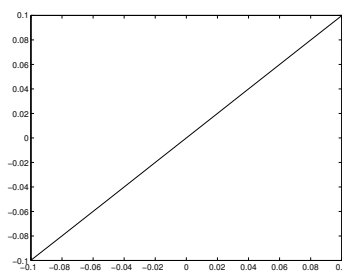
P8. Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$ (un tal punto se llama *punto fijo* para la función $f(\cdot)$).

Indicación: Considere $g(x) = f(x) - x$.

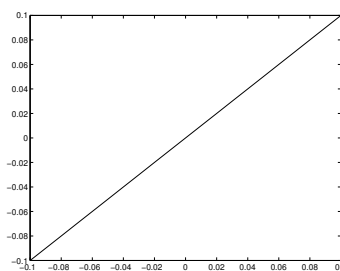


3.1 Funciones derivables

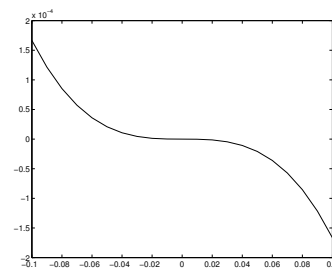
Las funciones más simples de analizar son las funciones afines $a(x) = n + mx$. Ahora bien, muchas funciones no lineales son “aproximadamente afines” cuando se las observa en una pequeña vecindad en torno a un punto. Por ejemplo, a simple vista, el gráfico de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[-0.1, 0.1]$ es prácticamente indistinguible del gráfico de $a(x) = x$. De hecho, la diferencia máxima entre ambas funciones es del orden de $1.7e-04$, vale decir menos del 0.1 % del largo del intervalo.



$f(x) = \sin(x)$



$a(x) = x$



$o(x) = \sin(x) - x$

El mismo ejercicio en el intervalo $[-0.01, 0.01]$ arroja diferencias inferiores al 0.001 % del largo del intervalo. Observando intervalos más y más pequeños en torno a 0 las discrepancias se hacen cada vez menos perceptibles, de manera que la función afín $a(x) = x$ es una muy buena aproximación de la función $\sin(x)$ cerca de 0. Esto corresponde simplemente al hecho que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$, lo cual se puede escribir también en la forma

$$\sin(x) = x + o(x)$$

donde el “error” $o(x)$ es pequeño comparado con x : $\lim_{x \rightarrow 0} o(x)/x = 0$.

Más generalmente consideremos una función $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in (a, b)$. Supongamos que deseamos encontrar una función afín $a(x) = n + mx$ que sea una “buena” aproximación de $f(x)$ en torno a $\bar{x}$, es decir

$$f(x) \sim a(x) \quad \text{para} \quad x \sim \bar{x}.$$

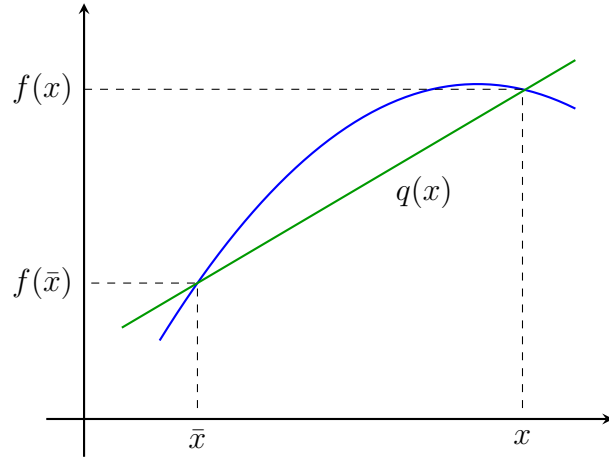
Es razonable imponer de partida que ambas funciones entreguen el mismo valor para $x = \bar{x}$, vale decir, a debe ser de la forma $a(x) = f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$. Con esto, la propiedad de aproximación se escribe

$$f(x) \sim f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$$

y por lo tanto la pendiente m debe ser tal que

$$m \sim q(x) := \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Dado que nos interesa la propiedad de aproximación para x cercano a $\bar{x}$, es razonable escoger m como el límite de los cuocientes $q(x)$ cuando x tiende a $\bar{x}$. Geométricamente, $q(x)$ corresponde a la pendiente de la recta secante al gráfico de f como muestra la figura, y el proceso límite se interpreta como la búsqueda de la recta tangente al gráfico de f en $\bar{x}$.



DEFINICIÓN Diremos que $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a, b)$, si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama *derivada de f en $\bar{x}$* .

De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto pues

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})] = f(\bar{x}).$$

Ejemplo 3.1.

Una función afín $f(x) = a + bx$ es obviamente derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $f'(\bar{x}) = b$. En particular las funciones constantes son derivables con derivada nula en todo punto.

Ejemplo 3.2.

La función $f(x) = |x|$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$. De hecho, si $\bar{x} > 0$ la función f coincide con la función $g(x) = x$ en un entorno de $\bar{x}$ y por lo tanto $f'(\bar{x}) = 1$. Similarmente se tiene $f'(\bar{x}) = -1$ si $\bar{x} < 0$. Para $\bar{x} = 0$ la función $|x|$ no es derivable pues $\lim_{h \rightarrow 0} |h|/h$ no existe (los límites laterales son distintos).

Ejemplo 3.3.

La función definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es continua en $\bar{x} = 0$ pero no es derivable en dicho punto pues $[f(h) - f(0)]/h = \operatorname{sen}(1/h)$ no converge cuando $h \rightarrow 0$.

Ejemplo 3.4.

La función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{(\bar{x} + h)^2 - \bar{x}^2}{h} = \frac{2\bar{x}h + h^2}{h} = 2\bar{x} + h \rightarrow 2\bar{x}$$

de modo que $f'(\bar{x}) = 2\bar{x}$.

Ejemplo 3.5.

El ejemplo de motivación del capítulo muestra que la función $\operatorname{sen}(x)$ es derivable en $\bar{x} = 0$ con $\operatorname{sen}'(0) = 1$. Más generalmente, esta función es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\operatorname{sen}'(\bar{x}) = \cos(\bar{x}).$$

En efecto, la fórmula del seno de una suma de ángulos nos da

$$\frac{\operatorname{sen}(\bar{x} + h) - \operatorname{sen}(\bar{x})}{h} = \frac{\operatorname{sen}(\bar{x})(\cos(h) - 1) + \cos(\bar{x}) \operatorname{sen}(h)}{h}$$

de modo que la conclusión se sigue de los límites conocidos : $\lim_{h \rightarrow 0} [\cos(h) - 1]/h = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(h)/h = 1$.

Similarmente, $\cos(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\cos'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x}).$$

Esto resulta de la fórmula del coseno de una suma de ángulos que permite escribir

$$\frac{\cos(\bar{x} + h) - \cos(\bar{x})}{h} = \frac{\cos(\bar{x})(\cos(h) - 1) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \operatorname{sen}(h)}{h}.$$

Ejemplo 3.6.

La función $\exp(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x}$ con

$$\exp'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}).$$

En efecto, dado que $\lim_{h \rightarrow 0} [\exp(h) - 1]/h = 1$ (límite conocido), se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(\bar{x} + h) - \exp(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(\bar{x}) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(\bar{x}).$$

Asimismo, el límite $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)/u = 1$ implica que $\ln(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} > 0$ con

$$\ln'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\bar{x}+h) - \ln(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h/\bar{x})}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{\bar{x}u} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Álgebra de derivadas

Las propiedades algebraicas del límite nos permiten obtener reglas sencillas para calcular la derivada de una suma, producto y cociente de funciones derivables.

Proposición 3.1. Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces:

(a) $f + g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x}).$$

(b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x}).$$

(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. La propiedad (a) resulta de la linealidad del límite junto con

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} + \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Análogamente, para ver (b) basta usar la identidad

$$\frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(x)\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} + g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Observando que f es continua en $\bar{x}$ y usando álgebra de límites resulta que el primer término de la suma anterior converge a $f(\bar{x})g'(\bar{x})$, mientras que el segundo término tiende a $g(\bar{x})f'(\bar{x})$. La propiedad (c) se obtiene de manera similar usando la descomposición

$$\frac{f(x)/g(x) - f(\bar{x})/g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{1}{g(x)g(\bar{x})} \left[g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right]. \quad \square$$

Ejemplo 3.7.

Para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la función $f_n(x) = x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$f'_n(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}.$$

Los ejemplos de la sección anterior muestran que la fórmula vale para $n = 0, 1, 2$. Probemos por inducción que la fórmula es cierta para todo $n \geq 1$. En efecto, si el resultado se tiene para un cierto $n \geq 1$ entonces, de acuerdo a la proposición anterior la función $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x) \cdot x$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$f'_{n+1}(\bar{x}) = f'_n(\bar{x}) \cdot \bar{x} + f_n(\bar{x}) \cdot 1 = n\bar{x}^{n-1} \cdot \bar{x} + \bar{x}^n = (n+1)\bar{x}^n$$

lo cual concluye el paso de inducción.

Con esto, la fórmula para la derivada de un cuociente implica que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la función $g_n(x) = x^{-n} = 1/x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$ con

$$g'_n(\bar{x}) = \frac{-n\bar{x}^{n-1}}{(\bar{x}^n)^2} = -n\bar{x}^{-n-1}.$$

Ejemplo 3.8.

Como corolario del ejemplo anterior se sigue que todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \cdots + na_n\bar{x}^{n-1}.$$

Por ejemplo $p(x) = 1 + x^3 + 5x^7$ es derivable con $p'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2 + 35\bar{x}^6$. Asimismo, toda función racional es derivable en su dominio. Por ejemplo $f(x) = x/(1-x^2)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1 \cdot (1 - \bar{x}^2) - \bar{x} \cdot (-2\bar{x})}{(1 - \bar{x}^2)^2} = \frac{1 + \bar{x}^2}{(1 - \bar{x}^2)^2}.$$

Ejemplo 3.9.

Las funciones $\tan(x)$ y $\cotan(x)$ son derivables en sus respectivos dominios y se tiene

$$\begin{aligned}\tan'(\bar{x}) &= \sec^2(\bar{x}), \\ \cotan'(\bar{x}) &= -\operatorname{cosec}^2(\bar{x}).\end{aligned}$$

La primera fórmula por ejemplo es válida para todo $\bar{x} \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, y se obtiene usando la fórmula de la derivada de un cuociente pues

$$\left(\frac{\operatorname{sen}}{\operatorname{cos}}\right)'(\bar{x}) = \frac{\operatorname{sen}'(\bar{x})\operatorname{cos}(\bar{x}) - \operatorname{sen}(\bar{x})\operatorname{cos}'(\bar{x})}{\operatorname{cos}^2(\bar{x})} = \frac{\operatorname{cos}^2(\bar{x}) + \operatorname{sen}^2(\bar{x})}{\operatorname{cos}^2(\bar{x})} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(\bar{x})}.$$

Ejemplo 3.10.

La regla del cuociente implica que $f(x) = \exp(-x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = -\exp(-x)$. De esto, usando álgebra de derivadas, se deduce

$$\begin{aligned}\sinh'(\bar{x}) &= \cosh(\bar{x}), \\ \cosh'(\bar{x}) &= \sinh(\bar{x}), \\ \tanh'(\bar{x}) &= 1/\cosh^2(\bar{x}).\end{aligned}$$

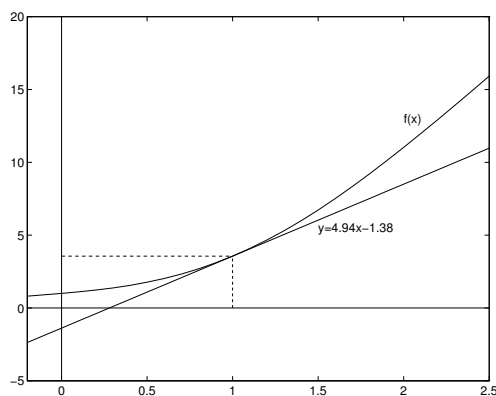
Ejemplo 3.11.

La función $f(x) = \exp(x) + x^2 \sin(x)$ es derivable en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. En efecto, las funciones x^2 y $\sin(x)$ son derivables en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto lo mismo ocurre con su producto $x^2 \sin(x)$. La suma de esta última con la función derivable $\exp(x)$, nos da la función $f(x)$ la cual resulta por lo tanto derivable en todo $\mathbb{R}$. El álgebra de derivadas nos permite calcular

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x}) + 2\bar{x} \sin(\bar{x}) + \bar{x}^2 \sin'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}) + 2\bar{x} \sin(\bar{x}) + \bar{x}^2 \cos(\bar{x}).$$

En particular $f'(1) \sim 4.9415$ y puesto que $f(1) \sim 3.5598$ se obtiene que la aproximación afín de $f(\cdot)$ en $\bar{x} = 1$ es la función

$$a(x) = 3.5598 + 4.9415(x - 1) = 4.9415x - 1.3818.$$



Regla de la cadena

La composición de funciones derivables sigue siendo derivable y existe una fórmula sencilla para calcular su derivada: la regla de la derivación en cadena, o simplemente *regla de la cadena*.

Teorema 3.2. Sea $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}).$$

DEMOSTRACIÓN. Definiendo $q(y) := [g(y) - g(\bar{y})]/[y - \bar{y}]$ si $y \neq \bar{y}$ y $q(\bar{y}) := g'(\bar{y})$ podemos escribir $g(y) - g(\bar{y}) = q(y)[y - \bar{y}]$ con $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} q(y) = g'(\bar{y})$. De aquí resulta

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(f(x)) - g(f(\bar{x}))}{x - \bar{x}} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} q(f(x)) \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = g'(\bar{y}) f'(\bar{x}).$$

□

Observación: Usando la notación $\frac{df}{dx}$ para la derivada, la regla de la cadena adopta una forma más fácil de recordar: si $y = y(u)$ con $u = u(x)$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 3.12.

Para $a > 0$, la función $f(x) = a^x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ con

$$f'(\bar{x}) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

En efecto, por definición se tiene $f(x) = \exp(x \ln(a))$ la cual es la composición de la función $\exp$ con la función lineal $g(x) = x \ln(a)$. La regla de la cadena asegura que dicha composición es derivable y se tiene

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x} \ln(a))g'(\bar{x}) = \exp(\bar{x} \ln(a)) \ln(a) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

Ejemplo 3.13.

Podemos también generalizar la regla de la derivada para las potencias al caso de potencias de exponente real. Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. La función $f(x) = x^a$ definida para $x > 0$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = a\bar{x}^{a-1}.$$

Para ver esto basta expresar $f(x) = \exp(a \ln(x))$ y aplicar la regla de la cadena para obtener

$$f'(\bar{x}) = \exp(a \ln(\bar{x})) \frac{a}{\bar{x}} = \bar{x}^a \frac{a}{\bar{x}} = a\bar{x}^{a-1}.$$

En particular $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}.$$

Ejemplo 3.14.

La función $f(x) = \tanh\left(\sqrt{1 + \sin^2(x)}\right)$ es composición de funciones derivables. La regla de la

cadena nos permite calcular:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \tanh' \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)} \right) \left[\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)} \right]' \\
 &= \frac{1}{\cosh^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)} \right)} \frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}} [1 + \operatorname{sen}^2(x)]' \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{\cosh^2 \left(\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)} \right) \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x)}}.
 \end{aligned}$$

Derivadas de funciones inversas

Teorema 3.3. Sea $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

DEMOSTRACIÓN. Del capítulo anterior sabemos que la función inversa f^{-1} es continua. De este modo, definiendo $x(y) = f^{-1}(y)$ se tiene $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} x(y) = \bar{x}$, y por lo tanto

$$\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \lim_{y \rightarrow \bar{y}} \frac{x(y) - \bar{x}}{f(x(y)) - f(\bar{x})} = \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

□

Observación: Nuevamente en la notación $\frac{df}{dx}$ el resultado anterior adopta una forma sugerente: si $y = y(x)$ y $x = x(y)$ representa la función inversa, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}.$$

Ejemplo 3.15.

La función $\operatorname{arc sen}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, siendo la inversa de sen resulta derivable en todo punto $\bar{y} \in (-1, 1)$. En efecto, en tal caso tenemos $\bar{x} = \operatorname{arc sen}(\bar{y}) \in (-\pi/2, \pi/2)$ y se tiene $\operatorname{sen}'(\bar{x}) = \cos(\bar{x}) \neq 0$, con lo cual

$$\operatorname{arc sen}'(\bar{y}) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\bar{x})} = \frac{1}{\cos(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\bar{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{y}^2}}.$$

Ejemplo 3.16.

La función $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2)$ con $\tan'(\bar{x}) = 1/\cos^2(\bar{x}) > 0$. Su inversa $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es por lo tanto derivable en todo punto $\bar{y} = \tan(\bar{x})$ y se tiene

$$\arctan'(\bar{y}) = \frac{1}{\tan'(\bar{x})} = \cos^2(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \tan^2(\bar{x})} = \frac{1}{1 + \bar{y}^2}.$$

Ejemplo 3.17.

La inversa de $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ es derivable en todo punto $\bar{y} \in (-1, 1)$ con

$$(\tanh^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(\bar{y}))} = \cosh^2(\tanh^{-1}(\bar{y})) = \frac{1}{1 - \bar{y}^2}.$$

Guía de Ejercicios

1. Demuestre que $f(x) = x^3$ es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2$.
2. Encuentre la aproximación afín de $\sin(x)$ en el punto $\bar{x} = 3\pi/4$.
3. Pruebe que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es derivable en $\bar{x} = 0$ con $f'(0) = 0$.
4. Sea $f(x) = 1 - \cos(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Q}$. Pruebe que f es derivable en $\bar{x} = 0$, y que $f'(0) = 0$.
5. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Pruebe que toda función $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.
6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en 0 tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = f'(0)f(\bar{x})$.
7. Usando álgebra de derivadas, demuestre por inducción que las funciones $f(x) = \sin(nx)$ y $g(x) = \cos(nx)$ son derivables con $f'(x) = n \cos(nx)$ y $g'(x) = -n \sin(nx)$.
8. Encuentre la aproximación afín de $f(x) = [\sin(2x) + \cos(2x)] \exp(-x)$ en el punto $\bar{x} = -1$.
9. Pruebe que $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ es derivable en todo punto $y \in (-1, 1)$ con $\arccos'(y) = -1/\sqrt{1-y^2}$.
10. Pruebe que la función $\sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y \in \mathbb{R}$ con $(\sinh^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2+1}$.
11. Pruebe que $\cosh^{-1}: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y > 1$ con $(\cosh^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2-1}$. ¿Qué ocurre en $y = 1$?

Guía de Problemas

P1. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

$$a) \ g(x) = xf(x) + 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \qquad b) \ g(a+b) = g(a)g(b).$$

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P2. Sea $c > 1$. Pruebe que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0 entonces existe el límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} [f(cx) - f(x)]/x$.

P3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $f' = af(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$, con a constante. Demuestre que $f(x) = f(0)e^{ax}$.

Indicación: Considere $g(x) = e^{-ax}f(x)$.

P4. Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (derivables), donde $i = 1, \dots, n$. Sea

$$G_n = f_1(f_2(\dots(f_n(x))\dots)).$$

Demuestre que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(\dots(f_n(x))\dots)))$$

P5. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(kg(x))$. Muestre que

$$f'' - f' \frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0.$$

P6. Sea f derivable en x_0 , calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

P7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

con $a \geq 0$. Pruebe que $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Derivadas: Los teoremas

4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

En lo que sigue presentaremos diversas aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. La primera corresponde a la regla de Fermat que permite caracterizar los puntos donde una función derivable alcanza su mínimo y su máximo. Para enunciar el resultado de manera precisa definiremos que se entiende por puntos de mínimo o máximo, local o global de una función.

DEFINICIÓN (PUNTOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN) Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, donde A es su dominio. Sea $\bar{x} \in A$.

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto de *mínimo global* de f , si $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

De manera análoga se define un punto de *máximo global* de f .

- Diremos que $\bar{x}$ es un punto de *mínimo local* de f si $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta].$$

De manera análoga se define un punto de *máximo local* de f .

Si se cumple cualquiera de los 4 casos, diremos que $\bar{x}$ es un punto extremo de la función f .

Claramente, todo punto de mínimo global es un punto de mínimo local de f (análogo para máximos)

Teorema 4.1. Si $\bar{x} \in A$ es un punto extremo de una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y f es derivable en $\bar{x}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\bar{x}$ es mínimo local, para x cercano a $\bar{x}$ se tiene $f(x) \geq f(\bar{x})$, con lo cual

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}),$$

es decir $f'(\bar{x}) = 0$. El caso de un máximo local es análogo. $\square$

Observación: El teorema se puede escribir en una línea del modo siguiente:

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \quad \wedge \quad f'(\bar{x}) \text{ existe} \quad \implies \quad f'(\bar{x}) = 0.$$

Usando un poco de álgebra proposicional se sabe que

$$\begin{aligned} (p \wedge q \implies r) &\iff \overline{p \wedge q} \vee r \\ &\iff \overline{p} \vee \overline{q} \vee r \\ &\iff (p \implies \overline{q} \vee r). \end{aligned}$$

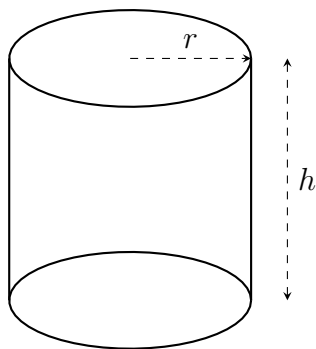
Por lo que el teorema también se puede escribir como

$$\bar{x} \text{ es extremo de } f \implies f'(\bar{x}) \text{ no existe} \vee f'(\bar{x}) = 0.$$

El conjunto de puntos, donde o bien f no es derivable, o bien la derivada vale 0, son los famosos puntos críticos de una función. Usando este lenguaje, el teorema se lee diciendo que todo punto extremo es punto crítico. Por lo tanto, para encontrar los puntos extremos de una función uno siempre comienza por buscar los puntos críticos de ella y después analiza cual de ellos es o no punto extremo. Después se puede seguir analizando la función, para determinar cual punto extremo es máximo o mínimo y cual de ellos es local o global.

Ejemplo 4.1.

Deseamos diseñar un cilindro de radio r y altura h cuyo volumen $V = \pi r^2 h$ sea máximo, para una superficie total dada $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. De esta última relación se obtiene $h = S/2\pi r - r$, con lo cual obtenemos la expresión del volumen exclusivamente en función del radio



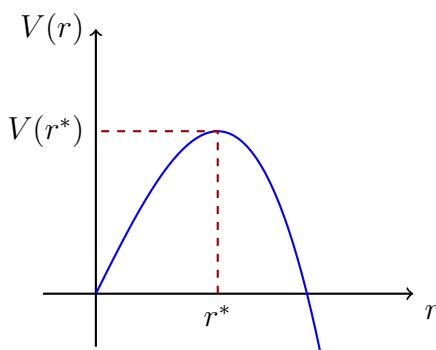
$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3.$$

El radio óptimo se obtiene de maximizar la función $V(r)$, para lo cual buscamos la solución de la ecuación $V'(r) = 0$, vale decir

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

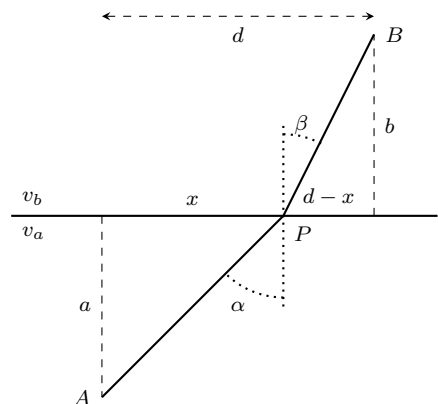
la cual tiene dos soluciones. Como nos interesan radios positivos, obtenemos $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ al cual le corresponde un volumen máximo $V(r^*) = \sqrt{S^3/54\pi}$ y una altura óptima $h^* = \sqrt{2S/3\pi} = 2r^*$.

En rigor aún no podemos asegurar que la solución encontrada corresponda efectivamente a un máximo del volumen, pues el criterio $V'(r) = 0$ no discrimina entre un mínimo y un máximo. Más adelante veremos criterios que permiten hacer tal distinción. Por el momento, para convencernos que la solución es un máximo, podemos hacer un gráfico aproximado de la función $V(r)$.



Ejemplo 4.2.

Un salvavidas A debe auxiliar a un bañista B . Corre desde A hasta un punto P al borde del mar, prosiguiendo a nado hasta B . Se desea determinar la posición de P que garantiza alcanzar B en el menor tiempo posible.



Suponiendo conocidas las velocidades en la tierra v_a y en el mar v_b , así como las distancias a, b, d , el tiempo se puede calcular como

$$T_{AB} = T_{AP} + T_{PB} = \frac{d_{AP}}{v_a} + \frac{d_{PB}}{v_b}$$

vale decir, en función de la variable x ,

$$T_{AB}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_b}.$$

Esta función es continua y en consecuencia alcanza su mínimo en $[0, d]$. Más adelante veremos herramientas que permiten probar

que el mínimo es de hecho alcanzado en un único punto $x \in (0, d)$, el cual queda por lo tanto caracterizado por la ecuación $T'_{AB}(x) = 0$, vale decir

$$\frac{x}{v_a \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0. \quad (4.1)$$

Este modelo tiene una importante aplicación física. En efecto, el *Principio de Fermat* en óptica establece que la luz viaja siguiendo trayectorias de tiempo mínimo. En un medio uniforme la velocidad de la luz es constante de modo que la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos A y B coincide con la de longitud mínima, vale decir, el segmento de recta que une A con B . Cuando A y B se encuentran en medios caracterizados por distintas velocidades de la luz v_a y v_b (aire/agua por ejemplo), la trayectoria exhibe un quiebre al pasar de un medio al otro, fenómeno conocido como *difracción*. En este contexto la relación (4.1), llamada *Ley de Snell*, se expresa en función de los ángulos α y β como

$$\frac{\sen \alpha}{v_a} = \frac{\sen \beta}{v_b}.$$

4.2 El teorema del valor medio

Al iniciar el capítulo motivamos la noción de derivada observando que ciertas funciones f (las derivables) se “parecen” (localmente) a sus aproximaciones afines $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$. Es natural conjeturar entonces que, al menos localmente, las propiedades de una función y de su aproximación coincidan. Así por ejemplo, si la aproximación es creciente, esto es si $f'(\bar{x}) > 0$, esperamos que f sea también creciente en una vecindad de $\bar{x}$. Esta conjetura no es del todo cierta y requiere ser precisada. La técnica básica para relacionar las propiedades de f con las de sus aproximaciones afines es el Teorema del Valor Medio (no confundir con el Teorema de los Valores

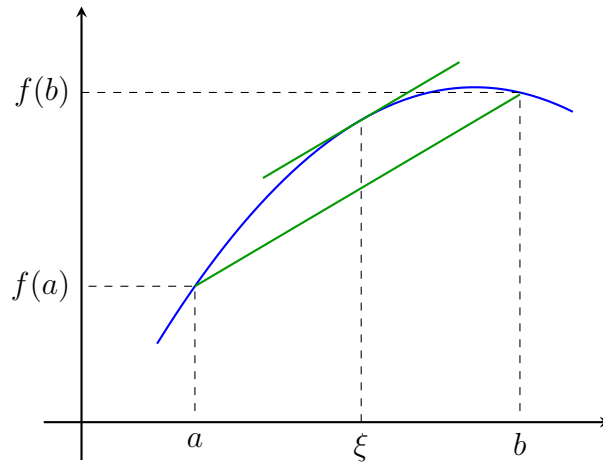
Intermedios).

Teorema 4.2 (TVM). Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



DEMOSTRACIÓN. Definiendo la función auxiliar $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)],$$

el resultado se reduce a probar la existencia de $\xi \in (a, b)$ tal que $h'(\xi) = 0$.

Usando el Teorema 1.3 sobre álgebra de funciones continuas y la Proposición 3.1 sobre álgebra de funciones derivables, se deduce que h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Además, por la propiedad de acotamiento de funciones continuas establecida en el Teorema 2.3, sabemos que h alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

Además, un cálculo sencillo muestra que $h(a) = h(b) = 0$. Esto nos permite realizar el siguiente razonamiento:

- Si existiera algún $x \in (a, b)$ donde $h(x) > 0$, el máximo de h se alcanzaría en algún punto $\xi \in (a, b)$. Usando la regla de Fermat, deduciríamos que en ese punto $h'(\xi) = 0$.
- Análogamente, si para algún $x \in (a, b)$ se tuviese $h(x) < 0$, bastaría tomar el punto $\xi \in (a, b)$ donde h alcance su mínimo.
- Por último, si las dos propiedades previas fallaran, la función h sería idénticamente nula en el intervalo (a, b) , y podemos tomar $\xi \in (a, b)$ arbitrario. $\square$

4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

En esta sección veremos la utilidad de la noción de derivada para el cálculo de límites, así como para estudio de la monotonía y convexidad de funciones.

La regla de l'Hôpital

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada *regla de l'Hôpital* para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o ∞/∞ .

Teorema 4.3. Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) , tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \pm\infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4.2)$$

siempre que este último límite exista.

DEMOSTRACIÓN. Para el caso $L = 0$, definiendo $f(a) = g(a) = 0$, el resultado es una aplicación directa del TVM y de la regla de composición para límites. El caso $L = \pm\infty$ es más delicado y se propone como ejercicio (difícil pero instructivo). $\square$

Obviamente, la regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a$, e incluso para límites con $x \rightarrow \infty$: si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ o ∞ y $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente grande, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista.

Ejemplo 4.3.

Veamos un límite conocido: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))/x^2 = 1/2$. Este límite es de la forma $0/0$. El cociente de derivadas es $\sin(x)/2x$ el cual converge a $1/2$, y por lo tanto podemos invocar la regla de l'Hôpital para concluir.

La regla de l'Hôpital nos permite ir un poco más lejos y probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

En efecto, aplicando reiteradamente l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{12x^2} = \frac{1}{24}.$$

Ejemplo 4.4.

Calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} [\exp(x) - 1 - x]/x^2$. La aplicación reiterada de la regla de l'Hôpital conduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.5.

Calculemos $\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(x) - 1 + x] / [\arctan(x) - \pi/4]$. Nuevamente estamos en presencia de un límite de la forma $0/0$. L'Hôpital conduce a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{\arctan(x) - \pi/4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x + 1}{1/(1+x^2)} = 4.$$

Ejemplo 4.6.

Consideremos el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \exp(x)) \sin(1/x)$, el cual puede escribirse como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \exp(x))}{1/\sin(1/x)}$$

que es de la forma ∞/∞ . La regla de l'Hôpital conduce a estudiar el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)/(1 + \exp(x))}{\cos(1/x)/[x^2 \sin^2(1/x)]}.$$

Usando álgebra de límites se ve que esta última expresión tiende a 1, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + \exp(x)) \sin(1/x) = 1.$$

Ejemplo 4.7.

(CÁLCULO DE ASÍNTOTAS) Recordemos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posee una recta asíntota $y = mx + n$ en ∞ , si existen los límites $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$. Observando la forma del límite que define la pendiente m , la regla de l'Hôpital nos permite deducir que si $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existe, entonces

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x).$$

Una observación análoga vale para el comportamiento asintótico de f en $-\infty$.

Consideremos por ejemplo la función $f(x) = \ln(1 + \exp \sqrt{1 + ax^2})$ donde $a > 0$. Para determinar si existe asíntota en ∞ calculamos

$$f'(x) = \frac{\exp \sqrt{1 + ax^2}}{1 + \exp \sqrt{1 + ax^2}} \frac{ax}{\sqrt{1 + ax^2}}.$$

Dado que $\sqrt{1 + ax^2} \rightarrow \infty$ y $\lim_{u \rightarrow \infty} \exp(u)/[1 + \exp(u)] = 1$, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp \sqrt{1 + ax^2}}{1 + \exp \sqrt{1 + ax^2}} = 1.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{1 + ax^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1/x^2 + a}} = \sqrt{a}$$

de modo tal que

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \sqrt{a}.$$

Como ejercicio, demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = 0$, de donde se sigue que f tiene una recta asíntota en ∞ descrita por la ecuación $y = \sqrt{a}x$.

4.4 Derivadas y monotonía

Para una función creciente, los cuocientes $(f(x) - f(\bar{x})) / (x - \bar{x})$ son no-negativos y por lo tanto, si f es derivable, se sigue que $f'(\bar{x}) \geq 0$. De igual forma, si f es decreciente se tiene $f'(\bar{x}) \leq 0$. El TVM permite probar las implicancias recíprocas.

Teorema 4.4. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que si $x, y \in [a, b]$ con $y > x$, el TVM implica que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ (resp $\leq, >, <$) para algún $c \in (x, y)$. $\square$

Ejemplo 4.8.

Consideremos la función $f(x) = x \exp(-x)$ definida y derivable en todo $\mathbb{R}$. Dado que $f'(x) = (1 - x) \exp(-x)$, observamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 1)$ mientras que $f'(x) < 0$ para $x \in (1, \infty)$. En consecuencia f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, \infty)$. En particular obtenemos que la función f alcanza su máximo en el punto $\bar{x} = 1$, tomando el valor $f(1) = 1/e$, vale decir $x \exp(-x) \leq 1/e$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la siguiente tabla de crecimiento:

	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Ejemplo 4.9.

Estudiemos el crecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$. La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$. Por lo tanto la tabla de crecimiento de f viene dada por

	$-\infty$	-1	2	∞
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

y en consecuencia f es creciente en $(-\infty, -1]$, decreciente en $[-1, 2]$, y nuevamente creciente en $[2, \infty)$. El punto $\bar{x} = -1$ corresponde a un máximo local, mientras que $\bar{x} = 2$ es un mínimo local.

Ejemplo 4.10.

Consideremos nuevamente el Ejemplo 4.1 y probemos que el valor $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ corresponde efectivamente al radio del cilindro de superficie S que tiene volumen máximo. La función volumen viene dada por $V(r) = Sr/2 - \pi r^3$, cuya derivada es $V'(r) = S/2 - 3\pi r^2$. De este modo se tiene $V'(r) > 0$ para $r \in (0, r^*)$ y $V'(r) < 0$ para $r > r^*$. Por lo tanto la función V es creciente en $[0, r^*]$ y decreciente en $[r^*, \infty)$, de modo tal que r^* entrega efectivamente un máximo para $V(r)$.

Ejemplo 4.11.

Reconsideremos ahora el problema de trayectoria de tiempo mínimo del Ejemplo 4.2. Vimos que la función $T_{AB}(x)$ es derivable en todo punto $x \in (0, d)$, con

$$T'_{AB}(x) = \frac{x}{v_a \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b \sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$

Dado que $T'_{AB}(0) < 0$ y $T'_{AB}(d) > 0$, el TVI asegura la existencia de algún $\bar{x} \in (0, d)$ tal que $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$. Por otra parte la derivada de la función T'_{AB} está dada por

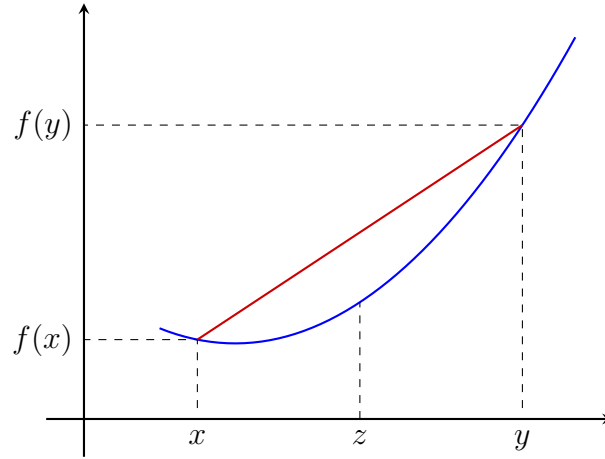
$$T''_{AB}(x) = \frac{a^2}{v_a [x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{b^2}{v_b [(d-x)^2 + b^2]^{3/2}}$$

la cual es positiva, de modo que T'_{AB} es estrictamente creciente en $(0, d)$. Como $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$, se sigue que $T'_{AB}(x)$ es negativa en $(0, \bar{x})$ y positiva en $(\bar{x}, d)$, y por consiguiente T_{AB} es decreciente en $(0, \bar{x})$ y creciente en $(\bar{x}, d)$. Esto prueba que $\bar{x} \in (0, d)$ es el único mínimo de la función T_{AB} .

4.5 Derivadas y convexidad

Una propiedad geométrica de las funciones, que permite hacerse una idea más precisa de la forma de su gráfico, es la convexidad o concavidad. Una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *convexa* si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x) \quad \forall x < z < y. \quad (4.3)$$



La desigualdad (4.3) se puede escribir en la forma

$$[f(z) - f(x)](y - x) \leq \{[f(y) - f(z)] + [f(z) - f(x)]\}(z - x)$$

o también $[f(z) - f(x)](y - z) \leq [f(y) - f(z)](z - x)$, de modo que (4.3) equivale a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad (4.4)$$

mostrando que la convexidad corresponde a la monotonía de las pendientes de las rectas secantes al gráfico de f . Esto conduce a la siguiente caracterización.

Teorema 4.5. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b) .*

DEMOSTRACIÓN. Si f es convexa y $x < y$, tomando $z \in (x, y)$ y $v > y$ se obtiene

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Haciendo $z \rightarrow x^+$ y $v \rightarrow y^+$ se sigue $f'(x) \leq f'(y)$ de modo que f' es creciente. Recíprocamente, si f' es creciente y $x < z < y$, la desigualdad de convexidad (4.4) resulta de usar el TVM el cual permite encontrar $c \in (x, z)$ y $d \in (z, y)$ tales que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

□

Análogamente, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *cóncava* si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso derivable, a que f' sea decreciente.

Ejemplo 4.12.

La función $f(x) = x^2$ tiene derivada $f'(x) = 2x$ la cual es creciente, y por lo tanto x^2 es convexa. Del mismo modo para $f(x) = \exp(x)$ se tiene que $f'(x) = \exp(x)$ es creciente y en consecuencia $\exp(x)$ es convexa. Para la función $f(x) = \ln(x)$ en cambio, se tiene que $f'(x) = 1/x$ la cual es decreciente en $(0, \infty)$ y por lo tanto $\ln$ es cóncava. Finalmente, para $f(x) = x^3$ se tiene $f'(x) = 3x^2$ la cual es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, de modo que x^3 es cóncava en $(-\infty, 0]$ y convexa en $[0, \infty)$.

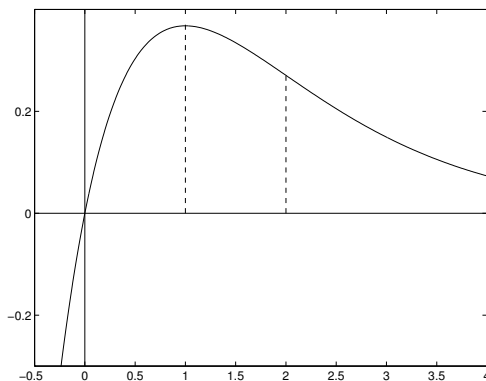
A diferencia de los ejemplos anteriores, en muchos casos la monotonía de $f'(x)$ no es evidente. Sin embargo, si la función $f'(x)$ es ella misma derivable, podemos estudiar su monotonía a través de los signos de su derivada, que denotamos $f''(x)$.

Ejemplo 4.13.

Consideremos la función $f(x) = x \exp(-x)$. Ya vimos en el Ejemplo 4.8 que $f'(x) = (1 - x) \exp(-x)$ con lo cual obtuvimos que f es creciente en $(-\infty, 1]$ y decreciente en $[1, \infty)$. Para estudiar la convexidad de f debemos determinar el crecimiento de la función $g(x) = f'(x)$. Como esta última es derivable bastará estudiar los signos de su derivada $g'(x) = f''(x) = (x - 2) \exp(-x)$. Claramente $g'(x) > 0$ ssi $x > 2$, de donde $g = f'$ es creciente en $[2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2]$. Concluimos que f es cóncava en $(-\infty, 2]$ y convexa en $[2, \infty)$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la tabla de convexidad:

	$-\infty$	2	∞
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Un gráfico aproximado de la función es el siguiente:





Derivadas de mayor orden

5.1 Derivadas de orden superior

En la sección anterior vimos la relación entre f' y la monotonía de f , así como entre f'' y la convexidad/concavidad de f . El significado geométrico de las derivadas de orden superior es menos evidente, pero ellas son útiles para construir aproximaciones polinomiales de la función, más precisas que la aproximación afín dada por la derivada primera. Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. En particular $f^{[1]}(\bar{x}) = f'(\bar{x})$, $f^{[2]}(\bar{x}) = f''(\bar{x})$, ... Notar que para que f tenga una derivada de orden k en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$.

Si f admite una derivada de orden k en todo punto de un intervalo (a, b) , entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a k) son continuas en (a, b) . Diremos que $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a, b)$ si es k veces derivable en todo punto del intervalo (a, b) , y la función $f^{[k]}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo k , diremos que f es de clase C^∞ .

Ejemplo 5.1.

Las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ poseen derivadas de todos los órdenes y son de clase C^∞ . En efecto, sabemos que $f'(\bar{x}) = \cos(\bar{x})$ y $g'(\bar{x}) = -\sin(\bar{x})$. De manera inductiva se encuentra que

$$\sin^{[k]}(\bar{x}) = \begin{cases} \sin(\bar{x}) & \text{si } k = 0 \pmod{4}, \\ \cos(\bar{x}) & \text{si } k = 1 \pmod{4}, \\ -\sin(\bar{x}) & \text{si } k = 2 \pmod{4}, \\ -\cos(\bar{x}) & \text{si } k = 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

y análogamente para las derivadas sucesivas de $\cos$.

5.2 Desarrollos limitados

Diremos que $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x} \in (a, b)$ si existen constantes $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \dots + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k).$$

con $\lim_{u \rightarrow 0} o(u^k)/u^k = 0$. Usando el cambio de variables $h = x - \bar{x}$, la propiedad se escribe de manera equivalente

$$f(\bar{x} + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_kh^k + o(h^k).$$

Un desarrollo limitado de orden k es por lo tanto una aproximación polinomial, cuyo error de aproximación es pequeño en comparación con $(x - \bar{x})^k$. La herramienta básica para obtener tales aproximaciones son los desarrollos de Taylor descritos a continuación.

Teorema 5.1. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, k -veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, y sea

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} o(h^k)/h^k = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$ tal que f es $(k - 1)$ veces derivable en $I_\epsilon = (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$, y sea $\tilde{f}(x) := f(x) - T_f^k(x - \bar{x})$. Notando que $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}'(\bar{x}) = \cdots = \tilde{f}^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$, al igual que para la función $g(x) := (x - \bar{x})^k$, podemos aplicar el TVM inductivamente $(k - 1)$ veces y deducir que para todo $x \in I_\epsilon$, $x \neq \bar{x}$ existe $\xi = \xi(x)$ (en $(\bar{x}, x)$ o $(x, \bar{x})$ según corresponda) tal que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}^{[k-1]}(\xi)}{g^{[k-1]}(\xi)} = \frac{1}{k!} \left[\frac{f^{[k-1]}(\xi) - f^{[k-1]}(\bar{x})}{\xi - \bar{x}} - f^{[k]}(\bar{x}) \right].$$

Dado que $\xi = \xi(x) \rightarrow \bar{x}$, la regla de composición de límites implica que el lado derecho tiende a 0, lo que permite concluir. $\square$

Observación: La recíproca es en general falsa: el hecho que una función admita un desarrollo limitado de orden k en $\bar{x}$ no implica la existencia de $f^{[k]}(\bar{x})$. Considerar por ejemplo la función $f(x) = x \sin x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si no, la cual admite el desarrollo limitado $f(x) = x^3 + o(x^3)$ pero que solamente es derivable en $\bar{x} = 0$ y por lo tanto no tiene derivada segunda ni menos tercera en dicho punto.

Ejemplo 5.2.

La función $f(x) = \exp(x)$ es de clase C^∞ con $f^{[k]}(0) = 1$ para todo k . Así, su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 viene dado por

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k).$$

Ejemplo 5.3.

La función $f(x) = -\ln(1 - x)$ es derivable en $(-\infty, 1)$ con $f'(x) = 1/(1 - x)$. Se sigue que $f''(x) = 1/(1 - x)^2$, $f'''(x) = 2/(1 - x)^3$, $\dots$, $f^{[k]}(x) = (k - 1)!/(1 - x)^k$. En consecuencia f es de clase C^∞ en $(-\infty, 1)$, y su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 es

$$-\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} + o(x^k).$$

Ejemplo 5.4.

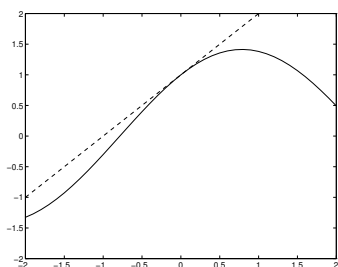
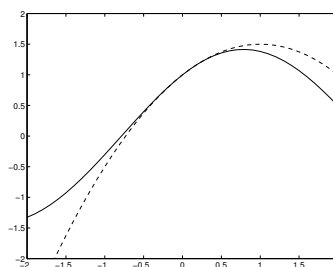
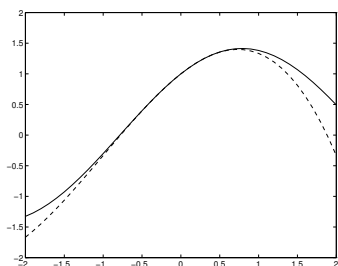
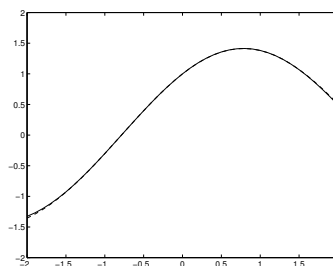
Sea $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Los desarrollos de Taylor de orden 1, 2 y 3 en torno a 0 están dados por

$$T_f^1(x) = 1 + x$$

$$T_f^2(x) = 1 + x - x^2/2$$

$$T_f^3(x) = 1 + x - x^2/2 - x^3/6$$

Los siguientes gráficos ilustran como los desarrollos de Taylor (línea discontinua) se aproximan cada vez mejor a la función original $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.


 $T_f^1(x)$

 $T_f^2(x)$

 $T_f^3(x)$

 $T_f^6(x)$

Los ejemplos que siguen ilustran como se pueden combinar desarrollos limitados conocidos para obtener desarrollos de funciones más complejas.

Ejemplo 5.5.

Los desarrollos limitados se pueden sumar y multiplicar, operando básicamente como si se tratara de polinomios. Consideremos por ejemplo los desarrollos limitados

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$$

$$\exp(-x) = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3).$$

Usando el hecho que un término $o(x^m)$ es también $o(x^k)$ si $k \leq m$, se obtiene

$$\exp(-x) + \sin(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Asimismo, el hecho que $x^m = o(x^k)$ si $m > k$ y también $f(x)o(x^k) = o(x^{m+k})$ siempre que

$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)/x^m| < \infty$ (ejercicio), se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) \exp(-x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right] \cdot \left[1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36} + o(x^4) \exp(-x) + o(x^3) \operatorname{sen}(x) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6.

Los desarrollos limitados también se pueden componer. Por ejemplo, para obtener un desarrollo limitado de orden 2 de $f(x) = \ln[1 + \exp(x)]$ en torno a $\bar{x} = 0$, podemos usar el desarrollo $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ que permite escribir

$$f(x) = \ln[2 + x + x^2/2 + o(x^2)].$$

Por otro lado, dado que

$$\ln[2 + z] = \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + o(z^2)$$

reemplazando $z = x + x^2/2 + o(x^2)$ se obtiene

$$f(x) = \ln 2 + \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]}{2} - \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]^2}{8} + o([x + x^2/2 + o(x^2)]^2).$$

Finalmente, para obtener el desarrollo buscado es suficiente identificar los coeficientes de las potencias de x de grado menor o igual que 2, pues todos los términos restantes son de orden $o(x^2)$. Con esto se llega a

$$\ln[1 + \exp(x)] = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Obviamente este mismo resultado se obtiene de calcular el desarrollo de Taylor de orden 2, pues $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = 1/2$ y $f''(0) = 1/4$.

Ejemplo 5.7.

Los desarrollos limitados también son útiles para calcular límites de la forma $0/0$. En rigor, se trata de otra forma de la regla de l'Hôpital. Ilustremos esto a través de un ejemplo sencillo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)}.$$

La primera potencia (no nula) en el desarrollo limitado del denominador es x^2 , más exactamente, $\ln(1 + 2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$. Haciendo un desarrollo de orden 2 del numerador se obtiene $\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = x^2 + o(x^2)$, de modo que el límite buscado es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x^2)/x^2}{2 + o(x^2)/x^2} = \frac{1}{2},$$

resultado que se obtiene también fácilmente usando la regla de l'Hôpital (ejercicio).

5.3 Caracterización de puntos críticos

Otra aplicación importante de las derivadas de orden superior es que permiten discriminar si un punto crítico ($f'(\bar{x}) = 0$) es mínimo local, máximo local, o punto de inflexión (punto de cambio de convexidad de la función). El resultado preciso es el siguiente.

Proposición 5.2. *Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, k veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, con $f'(\bar{x}) = \dots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

- (a) *Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.*
- (b) *Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.*
- (c) *Si k es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que k es par. Haciendo un desarrollo limitado de orden k para f en torno a $\bar{x}$ se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})^k} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}.$$

Se sigue que existe un intervalo I en torno a $\bar{x}$ en el cual $(f(x) - f(\bar{x})) / (x - \bar{x})^k$ tiene igual signo que $f^{[k]}(\bar{x})$. Como k es par se deduce que para todo $x \in I$, $x \neq \bar{x}$, se tiene $f(x) > f(\bar{x})$ en el caso (a) y $f(x) < f(\bar{x})$ en el caso (b).

Si k es impar, un desarrollo de orden $(k - 2)$ de $g = f''$ conduce a

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f''(x)}{(x - \bar{x})^{k-2}} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{(k - 2)!}.$$

Como antes, para x cercano a $\bar{x}$ el signo de $f''(x) / (x - \bar{x})^{k-2}$ es igual al de $f^{[k]}(\bar{x})$ y, dado que $k - 2$ es impar, se deduce que $f''(x)$ cambia de signo entre $x < \bar{x}$ y $x > \bar{x}$, de modo que la convexidad de f cambia al cruzar $\bar{x}$. $\square$

5.4 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

Teorema 5.3. *Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k + 1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo (a, b) . Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!} (x - \bar{x})^{k+1}. \quad (5.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Análoga al Teorema 5.1: aplicando el TVM inductivamente $(k + 1)$ veces, para $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) se encuentra $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que

$$\frac{f(x) - T_f^k(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^{k+1}} = \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}.$$

□

Ejemplo 5.8.

Retornado el Ejemplo 5.2 y usando el Teorema anterior, el error cometido al reemplazar $\exp(x)$ por su desarrollo de orden k se expresa como

$$\exp(x) - \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} = \frac{\exp(\xi)}{(k + 1)!} x^{k+1}$$

con $\xi \in (0, x)$ si $x > 0$, o bien $\xi \in (x, 0)$ si $x < 0$. En ambos casos se obtiene

$$\left| \exp(x) - \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \right| \leq \exp(|x|) \frac{|x|^{k+1}}{(k + 1)!},$$

y puesto que $|x|^{k+1}/(k + 1)! \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, se deduce

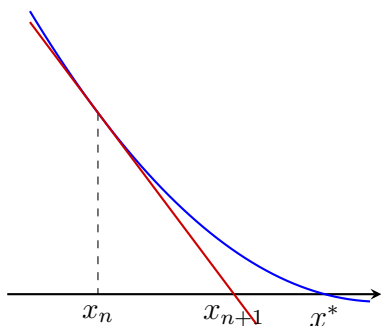
$$\exp(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Material Extra

5.5 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$ donde $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b) < 0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^* \in (a, b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia x^* , es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0 \sim x^*$. Si en la ecuación $f(x) = 0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a x_0 , obtenemos la ecuación lineal $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $f'(x_0) \neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de x^* , que esperamos sea más precisa.



La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n) \neq 0$. Esta iteración se conoce como el *Método de Newton* (para ecuaciones).

Ejemplo 5.9.

Para la ecuación $x^2 = a$, la iteración de Newton toma la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

la cual fué estudiada en detalle anteriormente, donde probamos que converge para todo punto de partida $x_0 > 0$. En esa ocasión se constató que la convergencia era muy rápida.

El siguiente resultado explica el origen de la rapidez del método de Newton.

Teorema 5.4. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^* \in (a, b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$ tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea M tal que $|f''(x^*)| < M|f'(x^*)|$ y escojamos $\epsilon \in (0, 1/M)$ de modo tal que se tenga $|f'(x)| > |f'(x^*)|/2$ y $|f''(x)| \leq M|f'(x^*)|$ para todo $x \in I_\epsilon$.

Si para un determinado n se tiene $x_n \in I_\epsilon$, entonces x_{n+1} está bien definido y

$$x_{n+1} - x^* = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - x^* = \frac{f(x^*) - f(x_n) - f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Usando el Teorema de Taylor podemos encontrar $\xi \in I_\epsilon$ tal que

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f''(\xi)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \right| \leq M|x_n - x^*|^2 \leq M\epsilon|x_n - x^*|$$

y como $M\epsilon < 1$ se sigue que $x_{n+1} \in I_\epsilon$. Esto permite razonar inductivamente a partir de x_0 para deducir $|x_n - x^*| \leq (M\epsilon)^n|x_0 - x^*| \rightarrow 0$. $\square$

Gruesamente, la desigualdad $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$ nos dice que el número de decimales exactos en la aproximación se duplica en cada iteración, lo cual es muy satisfactorio. Desafortunadamente el resultado anterior es de carácter local: solo asegura la convergencia si partimos suficientemente cerca de x^* , cuestión que no podemos saber *a priori* pues en general desconocemos x^* ! Existen resultados más explícitos, como el Teorema de Newton–Kantorovich, pero caen fuera de los objetivos de este curso. Nos limitaremos a ilustrar el teorema anterior a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.10.

Consideremos la ecuación $\tan(x) = x$ del Ejemplo 2.1. Nos interesa la solución de esta ecuación en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$. El método de Newton conduce a la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)}.$$

Iterando a partir de $x_0 = 4.45$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	4.450000	-7.3e-01
1	4.502423	1.9e-01
2	4.493791	7.7e-03
3	4.493410	1.4e-05
4	4.493409	4.5e-11
5	4.493409	8.9e-16

llegando a la estimación $x^* \sim 4.49340945790906$. Se aprecia la clara superioridad del método de Newton que en 5 iteraciones alcanza una precisión de 10^{-15} , respecto del método de bisección que toma 21 iteraciones para una precisión de apenas 10^{-6} .

Guía de Ejercicios

1. Pruebe que una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) es Lipschitz de constante L si y solamente si $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in (a, b)$.
2. Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables con $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Pruebe que f y g difieren en una constante.
3. Sea $p(x)$ un polinomio con k raíces reales distintas. Muestre que si $\alpha \neq 0$, $q(x) = p(x) - \alpha p'(x)$ posee al menos k raíces reales distintas.
Indicación: Considerar la función $f(x) = \exp(-x/\alpha)p(x)$ y notar que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
4. Estudie el crecimiento y convexidad de las funciones

$$(i) \quad \frac{(x-1)^2}{x} \exp(1/x) \quad (ii) \quad \frac{\arcsen(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (iii) \quad x \sen(\ln(x))$$

5. Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq e^t - 1 - t \leq t^2 e^{|t|}/2$.
6. Determine el menor valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x+1)^x \leq x^{x+1}$.
7. Estudie la convexidad de las funciones $\exp(-x^2)$ y $x^2 \ln x$.
8. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y derivable en $\bar{x} \in (a, b)$. Pruebe que

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Deducir que si $f'(\bar{x}) = 0$ entonces $\bar{x}$ es un mínimo global de f en $[a, b]$.

9. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que f'' se anula exactamente en n puntos ($n \in \mathbb{N}, n > 0$). Pruebe que el número de intersecciones del gráfico de f con una recta dada es a lo sumo $n + 2$.
10. Estudie completamente las siguientes funciones:

$$a) \quad f(x) = \sen x - x + \frac{x^3}{6}.$$

$$c) \quad f(x) = x^{1/x} \text{ para } x > 0.$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}.$$

$$d) \quad f(x) = x \ln^2(x) \text{ para } x > 0.$$

11. Encuentre el desarrollo limitado de orden 4 en torno a 0 para las funciones

$$(i) \quad \exp(x^2)[x \cos^2(x) + \sen^2(x)] \quad (ii) \quad \arcsen(\sqrt{x}) / \sqrt{x(1+x)}.$$

12. Calcule los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sen x} - (\sen x)^x}{x^{\senh x} - (\senh x)^x}.$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \ln\left(\frac{\sen(x)}{x}\right).$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + 1)^{1/x}.$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{\tan(x)} \right).$$

13. Demuestre que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es de clase C^∞ y que $f^{[k]}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notar que los desarrollos limitados de todos los órdenes en torno a 0 son nulos, a pesar que la función no es nula.

14. Pruebe que la ecuación $\cotan(x) = \ln(x)$ posee una única solución x_n en $(n\pi, (n+1)\pi)$, y que $x_n - n\pi \sim 1/\ln(n)$, es decir, existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)[x_n - n\pi].$$

15. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $f^{[k]}(\cdot)$ es una función constante. Demuestre que f es necesariamente un polinomio de grado k .
16. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! + \dots \\ \cos(x) &= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! + \dots \\ \sinh(x) &= x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + x^9/9! + \dots \\ \cosh(x) &= 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + x^8/8! + \dots\end{aligned}$$

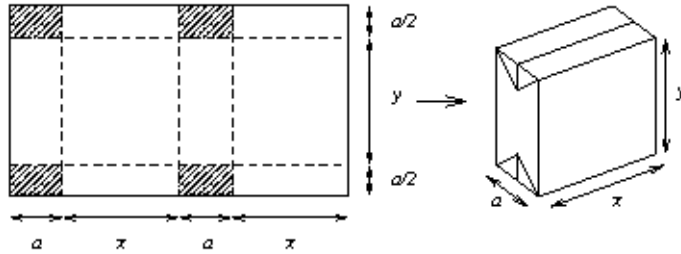
17. Encuentre un desarrollo limitado para $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en torno a 0, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sea inferior a 10^{-3} .
18. Use el método de Newton para estimar el mínimo de $f(x) = \exp(x) + x + x^2$.
19. En el Teorema 2.10 suponga f de clase C^k con $f''(x^*) = \dots = f^{[k-1]}(x^*) = 0$ y $f^{[k]}(x^*) \neq 0$. Demuestre que existe una constante M tal que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^k.$$

20. Demuestre que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa, la ecuación $f(x^*) = 0$ tiene a lo más 2 soluciones. Suponiendo que existe al menos una solución, pruebe que el método de Newton converge hacia una de ellas a partir de cualquier punto inicial x_0 , salvo que x_0 sea el mínimo de f (necesariamente único).

Guía de Problemas

- P1.** Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas a , x , y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro).

- (i) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidades a , x .
- (ii) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\frac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.
- (iii) Use (ii) para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explícite los valores óptimos de a , x , y .

- P2.** La función $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ se dice log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa.

- (i) Pruebe que si f es log-convexa entonces es convexa, y buscar un contraejemplo que muestre que la recíproca es falsa.
- (ii) Pruebe que f es log-convexa si y solo si f^α es convexa para todo $\alpha > 0$.

- P3.** Considere la función $f(x) = (x+1) \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (a) Encuentre ceros y signos de f .
- (b) Estudie las asíntotas horizontales de f . Encuentre los límites laterales cuando $x \rightarrow 0^\pm$ y $x \rightarrow 1^\pm$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
- (c) Use el Teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$$

- (d) Calcule la primera derivada de f .
- (e) Use el resultado de la parte P(c) para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$.
- (f) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.

- (g) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \rightarrow 1^+$ y cuando $x \rightarrow 0^-$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$.
- (h) Bosqueje el gráfico de f .
- P4.** (a) Una planta productora de cobre con capacidad instalada máxima de 9ton/día, puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las producciones diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3.6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cuál es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.
- (b) Sea f continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}^+$.
- 1) Use el teorema del Valor Medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$.
 - 2) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.
- P5.** (a) Sean $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g' < 0$ y $h' > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)).$$

Nota: Los paréntesis denotan composición.

- (b) Usando el Teorema de Valor Medio, demuestre que

$$1 + \ln x < (x + 1) \ln(x + 1) - x \ln x < 1 + \ln(x + 1), \quad \forall x > 0.$$

- (c) Deduzca de (a) la desigualdad

$$n \ln n - (n - 1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n + 1) \ln(n + 1) - n, \quad \forall n \geq 1.$$



Primitivas

DEFINICIÓN (PRIMITIVA) Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{int}(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y solo si

$$\forall x \in \text{int}(I), F'(x) = f(x).$$

Observación:

- Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una función f sobre I , entonces:

$$F'_1 = f \wedge F'_2 = f \implies (F_1 - F_2)' = 0$$

$$\implies F_1 - F_2 = \text{cte} = c$$

En consecuencia dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante.

- Además si F es una primitiva de f , entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de f .

Notación: El conjunto de todas las primitivas de f se anotará como $\int f$. Si F es una primitiva de f , entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual, usar la notación clásica:

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

donde dx corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

También suele llamarse *integral indefinida de f* a $\int f(x) dx$.

6.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c = \ln K|x|, K > 0.$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
4. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
5. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
12. $\int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c$
6. $\int \sinh x dx = \cosh x + c.$
7. $\int \cosh x dx = \sinh x + c.$
8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c.$
9. $\int \csc^2 x dx = \cot x + c.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c.$

Observación:

1. $\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad \int f' = f + c.$
2. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad \left(\int f \right)' = f.$

Proposición 6.1. $\int$ es un operador lineal, es decir:

1. $\int f \pm g = \int f \pm \int g.$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $F + c = \int f$ y $G + k = \int g$, entonces $F' = f$ y $G' = g \implies (f \pm g) = (F \pm G)'$. Luego $(F \pm G)$ es primitiva de $f \pm g$, es decir:

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g.$$

2. Sea $F + c = \int f$, entonces $F' = f$ y por ende $(\alpha F)' = \alpha f$. Así, $\alpha F = \int \alpha f$, de donde se concluye que

$$\int \alpha f = \alpha \int f.$$

□

6.2 Teorema de cambio de variable

Teorema 6.2 (Cambio de variable). Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u) \, du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x) \, dx \quad \text{o, equivalentemente} \quad \int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea F una primitiva de f , es decir $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, entonces $F(u) = (F \circ g)(x)$.

Calculemos:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

por lo tanto: $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$.

Es decir,

$$F(u) = \int f(u) \quad \text{y} \quad (F \circ g) = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

Pero $F(u) = (F \circ g)(x)$, luego $\int f(u) \, du = \int (f \circ g)(x)g'(x) \, dx$. □

Ejemplo 6.1.

$$1. \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + c = \arctan(\sin x) + c.$$

$$2. \int \left(\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} \right) dx$$

$$u = \arctan x \rightarrow du = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \int e^u \, du = e^u = e^{\arctan x} + c.$$

$$\text{Por lo tanto } \int \left(\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} \right) dx = e^{\arctan x} + c.$$

3.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} \quad \left(\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right)$$

$$= - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x|,$$

$$\text{por lo tanto: } \int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + c.$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x} = \ln |\operatorname{sen} x| + c. \\
5. \quad & \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + c. \\
6. \quad & \int \csc x \, dx = \int \frac{\csc x (\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \ln |\csc x - \cot x| + c. \\
7. \quad & \int (ax + b)^n \, dx ; \begin{cases} u = ax + b \\ du = a \, dx \end{cases} \\
& = \int u^n \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \frac{u^{n+1}}{(n+1)} + c = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)} + c. \\
8. \quad & \int \sqrt[5]{(3x-7)^3} \, dx = \frac{(3x-7)^{\frac{8}{5}}}{3 \cdot \frac{8}{5}} + c \\
& = \frac{5}{24} \sqrt[5]{(3x-7)^8} + c. \\
9. \quad & \int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = \ln |f(x)| + c.
\end{aligned}$$

6.3 Integración por partes

Proposición 6.3 (Fórmula de integración por partes). Sean u y v dos funciones de x , entonces:

$$\begin{aligned}
& \int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx \\
& \text{o, equivalentemente} \quad \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Luego, gracias a la Proposición 6.1, se tiene

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) \, dx + \int u(x)v'(x) \, dx,$$

y despejando, se concluye que

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx.$$

□

Observación: Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

donde $dv = v'(x) \, dx$ y $du = u'(x) \, dx$.

Ejemplo 6.2.

$$\begin{aligned} 1. \int x e^x \, dx & \quad \left(\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x \rightarrow v = e^x \end{array} \right) \\ & = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \ln x \, dx & \quad \left(\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right) \\ & = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. I_n = \int x^n \ln x \, dx & \quad \left(\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^n \rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right) \\ & = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} \right) \int x^n \, dx \\ & = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c. \end{aligned}$$

$$4. I_n = \int x^n e^x \, dx; n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Consideramos } \begin{array}{lcl} u = x^n & \rightarrow & du = n x^{n-1} dx \\ dv = e^x & \rightarrow & v = e^x \end{array}.$$

$$\implies I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx,$$

por lo tanto: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Veamos,

$$I_0 = \int e^x \, dx = e^x + c$$

y luego,

$$\begin{aligned} I_0 &= e^x + c \\ I_1 &= xe^x - I_0 \\ I_2 &= x^2e^x - 2I_1 \\ &\vdots \\ I_n &= x^ne^x - nI_{n-1} - 1. \end{aligned}$$

6.4 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan v$ o bien $x = a \sinh t$.
2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = a \sin v$ o $x = a \cos v$.
3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = a \sec v$ o $x = a \cosh t$.

6.5 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m(x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_tx + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots, r_s$ son las raíces de Q , de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_ix + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_ix + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_ix + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_ix + c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_ix + c_i)^{\beta_i}}$$

Ejemplo 6.3.

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2(x-7)(x^2+1)^3(x^2+2x+9)^2}.$$

Entonces,

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^3} + \frac{Jx+K}{x^2+2x+9} + \frac{Lx+M}{(x^2+2x+9)^2}.$$

Ejemplo 6.4.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2x-5}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2x-5 = (Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1). \quad (6.1)$$

Podemos usar dos métodos para obtener los valores de A, B, C y D :

- **Método 1:** Igualar coeficientes de ambos polinomios en x . Obtenemos así las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= A + C & (x^3) \\ 0 &= -4A + B - 2C + D & (x^2) \\ 2 &= 4A - 4B + C & (x^1) \\ -5 &= 4B - 2C + D & (x^0) \end{aligned}$$

Así, restando las ecuaciones asociadas a x^2 y x , y por otra parte restando las ecuaciones asociadas a x y x^3 , obtenemos

$$\begin{aligned} -4A - 3B &= 5 \\ 3A - 4B &= 2. \end{aligned}$$

De aquí, $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$. Reemplazando nuevamente en las ecuaciones se obtiene que $C = \frac{14}{25}$ y $D = -1/5$.

- **Método 2:** Como la igualdad de polinomios (6.1) debe ser $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces se pueden reemplazar algunos valores de x que sean convenientes. Incluso se pueden reemplazar (si no se complica mucho el álgebra) algunos valores de $x \in \mathbb{C}$.

Por ejemplo, si tomamos $x = 2$, luego (6.1) queda:

$$-1 = 5D,$$

de donde $D = -1/5$.

Además, como $x = i$ es raíz de $x^2 + 1 = 0$, usamos $x = i$ de donde obtenemos

$$\begin{aligned} 2i - 5 &= (Ai + B)(i - 2)^2 \\ &= (Ai + B)(i^2 - 4i + 4) \\ &= (Ai + B)(-4i) \\ &= 3Ai + 3B - 4Ai^2 - 4Bi \\ &= (3B + 4A) + (3A - 4B)i. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 3A - 4B &= 2 \\ 4A + 3B &= -5, \end{aligned}$$

que es el mismo sistema obtenido con el método anterior y cuya solución es $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$.

Finalmente, para calcular C , se puede reemplazar $x = 0$ y usando los valores ya calculados de A, B y D , concluir que $C = \frac{14}{25}$.

6.6 Primitivas de funciones trigonométricas reducibles a primitivas de funciones racionales

Consideramos primitivas del tipo

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

en donde R es una función racional en la cual aparecen sólo $\sin x$ y $\cos x$.

Ejemplo 6.5.

Las siguientes son este tipo de primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}, \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx.$$

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = \tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Pero por otra parte $\arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen,

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \sin x = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \cos x = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejercicio 6.1: Escriba la primitiva $\int R(\sin x, \cos x) dx$ usando el cambio de variable sugerido.

Guía de Ejercicios

1. Calcule las siguientes primitivas, en la variable x :

(a) $\int x^\alpha.$

(g) $\int \frac{1}{ax}.$

(m) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

(b) $\int \frac{1}{x}.$

(h) $\int \sinh(ax).$

(n) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(c) $\int \sin(ax).$

(i) $\int \cosh(ax).$

(ñ) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

(d) $\int \cos(ax).$

(j) $\int \frac{1}{1+x^2}.$

(o) $\int \frac{1}{a^2-x^2}.$

(e) $\int be^{ax}.$

(k) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(p) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

(f) $\int (ax)^\alpha.$

(l) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

2. Justifique en detalle el cálculo, hecho en la tutoría, de las primitivas:

(a) $\int \sec x \, dx.$

(b) $\int \csc x \, dx.$

3. Aplique un cambio de variable para calcular las siguientes primitivas, en la variable x :

(a) $\int \frac{x+1}{x^2+x}.$

(f) $\int e^{-\sqrt{x}}.$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

(g) $\int e^x \sqrt{1+e^x}.$

(c) $\int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)}.$

(h) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$

(d) $\int \frac{\tan(x)}{\ln(\sin(x))}.$

(i) $\int \sqrt{x^2-a^2}.$

(e) $\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}.$

(j) $\int \sqrt{x^2+a^2}.$

4. Sea $R(\sin x, \cos x)$ una función racional en la cual aparecen solo $\sin x$ y $\cos x$. Escriba la primitiva $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ usando el cambio de variable $u = \tan(x/2)$.

5. Usando integración por partes calcule las siguientes primitivas

(a) $\int x \sin(x).$

(c) $\int x e^x.$

(e) $\int x \cosh(x).$

(b) $\int x \cos(x).$

(d) $\int x \sinh(x).$

(f) $\int \frac{x}{1+x^2}.$

$$\begin{array}{lll}
\text{(g)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}. & \text{(j)} \int x^2 e^x. & \text{(m)} \int \frac{x^2}{1+x^2}. \\
\text{(h)} \int x^2 \operatorname{sen}(x). & \text{(k)} \int x^2 \operatorname{senh}(x). & \text{(n)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}. \\
\text{(i)} \int x^2 \cos(x). & \text{(l)} \int x^2 \cosh(x). &
\end{array}$$

6. Establezca fórmulas de recurrencia para la expresión I_n , dada por

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} I_n = \int x^n \operatorname{sen}(x). & \text{(d)} I_n = \int \operatorname{sen}^n(x). \\
\text{(b)} I_n = \int x^n \cos(x). & \text{(e)} I_n = \int \cos^n(x). \\
\text{(c)} I_n = \int x^n e^x. & \text{(f)} I_n = \int x^n \operatorname{senh}(2x).
\end{array}$$

7. Utilizando integración de funciones racionales calcule las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \frac{1}{1+x}. & \text{(d)} \int \frac{1}{1-x^2}. \\
\text{(b)} \int \frac{1}{x^2+2x+1}. & \text{(e)} \int \frac{1}{(1+x^2)^2}. \\
\text{(c)} \int \frac{1}{1+x^2}. &
\end{array}$$

8. Aplique el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ para calcular las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. & \text{(d)} \int \frac{1}{1-\cos(x)}. \\
\text{(b)} \int \frac{1}{\cos(x)}. & \text{(e)} \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}. \\
\text{(c)} \int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}. &
\end{array}$$

9. Calcule las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. & \text{(b)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{array}$$

10. Calcule $\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}}.$