Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Oficina de Publicaciones

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Tutorías y Guías del Curso

Semestre Otoño 2026

Se agradece notificar cualquier error que sea detectado para removerlo. Sugerencias y comentarios también son bienvenidos. Favor enviarlos a: apunteintrocal@dim.uchile.cl

Índice general

SEMANA 1:

Números Reales

1.1 Introducción

El conjunto[1] de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es el conjunto de números con el que han trabajado durante la enseñanza básica y media: el que contiene los números enteros tales como $1, 0, -1, 4, 10$, etc; los números racionales (las fracciones) tales como $1/2, 11/4, -7/3$, etc., y también los irracionales como $\sqrt{2}, -5\sqrt{3}, \pi$, etc.

En el conjunto de los números reales, se definen dos operaciones que conocen del colegio: la suma o adición y la multiplicación o producto. Formalmente, dados dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$,[2] la suma de x con y se denota por $x + y$ y es también un número real (esto es $x + y \in \mathbb{R}$), y la multiplicación de x con y se denota por $x \cdot y$ y es también un número real ($x \cdot y \in \mathbb{R}$).

En $\mathbb{R}$, hay numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a las propiedades de *cuerpo* de $\mathbb{R}$, es decir, aquellas asociadas a la suma y producto; el segundo grupo corresponde a las propiedades de *orden* de $\mathbb{R}$, que tienen que ver con las desigualdades y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales; esta es la propiedad de *completitud* de los números reales. Estas últimas propiedades están ligadas al llamado axioma del supremo, el cual hace a $\mathbb{R}$ único.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de "todas ellas" de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: "sí, corresponde a la propiedad 1743" (por ejemplo). Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Estos postulados básicos elementales se llaman *axiomas* y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Es decir, las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante un razonamiento lógico-matemático, a partir de los AXIOMAS.

[1] Un conjunto es una colección de elementos que comparten alguna propiedad en común.

[2] El símbolo $\in$ se lee "pertenece" y $x \in A$ se lee "x pertenece a A". Escribiremos $x \in A$ para denotar que x pertenece al conjunto A, es decir, que x es un elemento de A. Además, el símbolo $\notin$ se lee "no pertenece" y escribimos $x \notin A$ para indicar que x no es un elemento de A.

Para ejemplificar la idea de deducir propiedades a través de axiomas, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.
Consideremos un conjunto de números reales $C \subseteq \mathbb{R}^3$ que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $3 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $7 \notin C$.

A partir de estos axiomas que definen C, deduciremos que $1 \notin C$. Para esto, haremos un *razonamiento por contradicción* asumiendo que la propiedad que queremos probar no es cierta, es decir, asumiremos que $1 \in C$ y llegaremos alguna contradicción. Si fuese cierto que $1 \in C$, entonces podríamos ocupar **(A2)** para deducir que $4 = 3 \cdot 1 + 1 \in C$. Luego, como por **(A1)** sabemos que $3 \in C$, entonces usando **(A3)** y que $4 \in C$, deducimos que $7 = 4 + 3 \in C$, lo que contradice **(A4)**. Como llegamos a una contradicción, esto significa que lo que habíamos supuesto en primera instancia es falso, es decir, $1 \notin C$.

Volviendo a los números reales, agruparemos sus axiomas en 3 categorías: los axiomas de cuerpo (asociados a la suma y producto), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales). Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse que $\mathbb{R}$ es un *Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.*

1.2 Axiomas de Cuerpo de los Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ sobre la suma y producto también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en un total de 5, de los cuales los dos primeros son los siguientes[4]:

Axioma 1. (Conmutatividad)

(a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

[4]Para enunciar las propiedades utilizaremos el símbolo $\forall$ que se lee *para todo.* Usaremos $\forall x \in \mathbb{R}$ para indicar cierta propiedad se cumple para cualquier número real x.

(b) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su producto es un real y es independiente del orden en que se haga el producto, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y \;=\; y \cdot x.$$

Axioma 2. (Asociatividad)

(a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

(b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo, esta última igualdad es cierta gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores. En efecto:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y) && \text{Por el Axioma 1} \\ &= (x + z) + y. && \text{Por el Axioma 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma se pueden reordenar de cualquier forma, sin alterar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis a no ser que sea estrictamente necesario.

Ejercicios 1.1: Demuestre las siguientes igualdades, usando solo los Axiomas 1 y 2.

(1) $(a + b) + c = (a + c) + b = (b + a) + c = (b + c) + a = (c + a) + b = (c + b) + a.$
Aquí se han escrito todos los ordenamientos posibles de los reales a, b y c.

(2) $(x + y) + (z + w) = (x + w) + (z + y) = (w + y) + (x + z).$

El tercer axioma establece la forma en que interactúan la suma y el producto.

Axioma 3. (Distributividad)

(a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad **(b)** es una consecuencia de la propiedad **(a)** más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra en las demostraciones.

Los Axiomas 4 y 5 entregan la existencia de ciertos elementos especiales en $\mathbb{R}$, los elementos *neutros* para la suma y multiplicación, respectivamente.

Axioma 4a. (Existencia de elemento neutro para la suma)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números, denotados por la letra e, que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todo elemento e que cumpla esta propiedad se dirá neutro para la suma.

Notemos que este axioma sólo garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma y no nos dice cuantos hay, es decir, podría haber más de uno.

Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de $\mathbb{R}$, recordaremos que hay sólo un neutro, el número "cero". Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema 1.1. *El elemento neutro para la suma es único.*

Observación: Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos "cero" y lo denotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

Demostración. Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1.1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado otro neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x \tag{1.2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1.1) y e_1 en la igualdad (1.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar estas dos expresiones, vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

□

A continuación enunciamos el axioma 4 correspondiente al producto.

Axioma 4b. (Existencia de elemento neutro para el producto)
En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elemento neutro para el producto. En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que el neutro multiplicativo es único, es decir:

Teorema 1.2. *El elemento neutro para el producto es único.*

Observación:

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y, por lo tanto, se propone como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno" y lo denotaremos 1.
- El axioma dice, además, que $1 \neq 0$.

Axioma 5. (Existencia de elementos inversos)

(a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema 1.3.

(1) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, el inverso aditivo es único.*

(2) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, el inverso multiplicativo es único.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Sean p_1 y p_2 inversos aditivos de x, luego ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 && (1.3) \\ x + p_2 &= 0. && (1.4) \end{aligned}$$

Debemos probar que $p_1 = p_2$. En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 + 0 && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,} \\ &= p_1 + (x + p_2) && \text{aquí hemos usado la ecuación (1.4)} \\ &= (p_1 + x) + p_2 && \text{aquí hemos usado el axioma de Asociatividad} \\ &= (x + p_1) + p_2 && \text{aquí hemos usado el axioma de Conmutatividad} \\ &= 0 + p_2 && \text{hemos usado la ecuación (1.3)} \\ &= p_2 + 0 && \text{hemos usado el axioma de Conmutatividad,} \\ &= p_2 && \text{hemos usado el axioma del Neutro aditivo.} \end{aligned}$$

□

Observación:

- La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y, por lo tanto, se propone como ejercicio.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se denotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.
- Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo, que denotaremos como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

1.3 Propiedades en $\mathbb{R}$ relacionadas con la igualdad

A continuación, demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro laso, queremos ver por qué son ciertas y cómo se deducen a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Propiedad absorbente del 0

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce. Algunos piensan que es un axioma, pero en realidad, es una propiedad que se deduce de los axiomas.

Propiedad 1.1 (Propiedad absorbente del 0).

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ } \textit{se cumple } a \cdot 0 = 0.$$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{1.5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (1.5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Antes de continuar: Reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (1.5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned} x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\ &= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\ &= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\ &= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)] && \text{aquí apareció la suma conocida} \\ &= x + [(-a) + a] \\ &= x + [a + (-a)] \\ &= x + 0 = x \end{aligned}$$

$\square$

Consecuencia: Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

No existe el inverso multiplicativo del cero.

En efecto, si existiera debería cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$. Se obtendría, entonces, que $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

Propiedad 1.2. *En $\mathbb{R}$, las ecuaciones*

(1) $a + x = b, \quad a, b \in \mathbb{R},$

(2) $a \cdot x = b, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte **(1)**. Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte **(2)** es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración. Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo no riguroso, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{aligned} a + x &= b && \text{como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a) + (a + x) &= (-a) + b && \text{asociando} \\ [(-a) + a] + x &= (-a) + b && \text{pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0 + x &= (-a) + b && \text{pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x &= (-a) + b. \end{aligned}$$

La razón por la que no consideramos este cálculo riguroso, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación. En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

Ahora veamos que esta solución es única. Para ello, supongamos que hemos encontrado los reales x_1 y x_2, los que son soluciones de $a + x = b$. La unicidad quedará demostrada, si con sólo esta hipótesis, se concluye que $x_1 = x_2$.

Veamos si $a + x_1 = b$ y además $a + x_2 = b$, entonces:

$$\begin{aligned} a + x_1 &= a + x_2 \\ (-a) + [a + x_1] &= (-a) + [a + x_2] \\ [(-a) + a] + x_1 &= [(-a) + a] + x_2 \\ 0 + x_1 &= 0 + x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Con esto se concluye la demostración de la unicidad de soluciones. □

1.4 La resta y el cociente

DEFINICIÓN (DIFERENCIA Y COCIENTE)

- Llamaremos diferencia entre a y b al real $x = b + (-a)$ y se denota por $x = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en

$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

- El resultado de la ecuación *b)* $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:

$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Observación: De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones, se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

(1) Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

En efecto, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a + x = a + c$. Como la solución de esta ecuación es única, entonces $b = c$.

(2) Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

En efecto, análogamente al caso anterior, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a \cdot x = a \cdot c$.

(3) Resolución de la ecuación lineal general

$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{donde } a \neq 0.$$

Combinando las dos partes de la proposición anterior, se obtiene que, primero (usando la parte de la suma)

$$a \cdot x = -b$$

y por otro para el producto

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Propiedad 1.3 (Regla de los inversos).

(1) *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.

(2) *Para todo* $a \in \mathbb{R}^*$, $(a^{-1})^{-1} = a$, *donde* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$[5].

Demostración. En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a. Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien, debemos probar que a es dicho número, es decir,

$$(-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla. En efecto, se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso **(2)** es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Observación: De aquí se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedad 1.4 (Reglas de los signos).

(1) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$

(2) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(3) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$

(4) *Si* $a, b \neq 0$ *entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

[5] Dado un conjunto A y un elemento $a^* \in A$, el conjunto $A \setminus \{a^*\}$ es el conjunto de todos los elementos en A que son distintos a a^*.

(5) $a - (b + c) = a - b - c$

(6) $a - (b - c) = a - b + c$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la propiedad **(1)**. Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que **el opuesto de** $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$. Por lo tanto, debemos probar lo siguiente

$$(a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de **(1)**.

> **Antes de continuar:** Reconozca cuáles fueron los axiomas usados en cada una de las 3 igualdades anteriores.

Para demostrar la propiedad **(2)**, usamos la propiedad **(1)** dos veces en forma sucesiva. En efecto,

$$\begin{aligned}(-a) \cdot (-b) &= -[(-a) \cdot b] \\ &= -[b \cdot (-a)] \\ &= -[-(b \cdot a)] \\ &= ab.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad **(3)**, debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a) + (-b)$. Es decir, es necesario mostrar que

$$(a + b) + [(-a) + (-b)] = 0.$$

Esto efectivamente es cierto, ya que

$$\begin{aligned}(a + b) + [(-a) + (-b)] &= [(a + b) + (-a)] + (-b) \\ &= [(b + a) + (-a)] + (-b) \\ &= [b + (a + (-a))] + (-b) \\ &= [b + 0] + (-b) \\ &= b + (-b) = 0.\end{aligned}$$

La propiedad **(4)** es análoga a la **(3)**, cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades deben combinarse la propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad **(5)**. La propiedad **(6)** se propone como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho. Veamos:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a+[-(b+c)] \\ &= a+[(-b)+(-c)] \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= (a-b)-c. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedad 1.5. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \implies (x=0) \vee (y=0).$$

Demostración. La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$ (así es como se demuestra en general una implicación).

Entonces, sabemos que $x \cdot y = 0$ y debemos demostrar que:

$$x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente, x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida. Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso, la igualdad

$$x \cdot y = 0,$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}). Haciendo esto, se concluye que $y = 0$.

Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$. Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades adicionales

(1) $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b} \qquad \forall a, b, c, \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$

(2) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$

(3) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$

(4) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, c, d \neq 0$

(5) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(6) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(7) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(8) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(9) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Observación: En estas propiedades se han usado las notaciones siguientes

$$ab = a \cdot b \qquad 1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4, \qquad \text{etc.}$$
$$a \cdot a = a^2, \qquad a^2 \cdot a = a^3, \qquad a^3 \cdot a = a^4, \qquad \text{etc.}$$

Además, el símbolo $\pm$ representa el que la propiedad es cierta si se reemplazan todas las apariciones de $\pm$ por $+$, o si se reemplazan todas por $-$.

Demostración.

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{ac}{bc} &= ac(bc)^{-1} \\
&= ac(b^{-1}c^{-1}) \\
&= ac(c^{-1}b^{-1}) \\
&= a(cc^{-1})b^{-1} \\
&= a \cdot 1 \cdot b^{-1} \\
&= ab^{-1} \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= ab^{-1} \pm cd^{-1} \\
&= ab^{-1}dd^{-1} \pm cbb^{-1}d^{-1} \\
&= ad(bd)^{-1} \pm bc(bd)^{-1} \\
&= (ad \pm bc)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ad \pm bc}{bd}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= ab^{-1}cd^{-1} \\
&= ac(bd)^{-1} \\
&= \frac{ac}{bd}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= ab^{-1} : cd^{-1} \\ &= ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1} \\ &= ab^{-1} \cdot (c^{-1}d) \\ &= ad(bc)^{-1} \\ &= \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Antes de continuar: Reconozca cuales fueron los axiomas y propiedades usados en cada una de las igualdades anteriores.

La demostración de las propiedades restantes debe hacerse como ejercicio.

1.5 Material extra

La manera axiomática en la que se presentaron las dos operaciones de los números reales se puede generalizar a un objeto matemático abstracto llamado *cuerpo*. Formalmente, si F es un conjunto no vacío que posee dos operaciones, usualmente denotadas por $+$ y $\cdot$, se dice que $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo si F con sus operaciones $+$ y $\cdot$ satisfacen los axiomas de 1 a 5. Los números reales no son el primer ejemplo de cuerpo que conocen, ya que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ también forman un cuerpo con la suma y multiplicación usual.

En efecto, recordemos que los números racionales son todos los números de la forma p/q donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. En $\mathbb{Q}$ hay dos opraciones, la suma y producto, que se define como sigue: si p/q y r/s son dos números racionales, entonces su suma y producto se definen como

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

Es claro que tanto la suma como producto de dos números racionales es un número racional, esto se conoce como la propiedad de *clausura* de $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{Q}$. Además, como todo número racional es también un números real, entonces sus operaciones cumplen las mismas propiedades que la suma y producto en $\mathbb{R}$, en particular los axiomas 1 a 5. Esto muestra que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es también un cuerpo.

Estos dos ejemplos no son los únicos ejemplo de cuerpos que verán a lo largo de su carrera, ya que los cuerpos tienen muchas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. Un caso muy interesante, que aparece con mucha frecuencia en computación teórica, es el cuerpo que posee solo dos elementos. Considere el siguiente conjunto formado por dos elementos:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}\,.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las siguientes tablas:

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \triangle \\ \triangle & \triangle & \heartsuit \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} * & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ \triangle & \heartsuit & \triangle \end{array}$$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1. Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc. Este ejemplo es el cuerpo "más pequeño" que existe, y se denota como $\mathbb{F}_2$.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ Existen dos números distintos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x + y = x$ y $y + x = y$

2. $\square$ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y = y + x$.

3. $\square$ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y = x$.

4. $\square$ Para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \cdot y = y \cdot x$.

5. $\square$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = (x + z) + (y + z)$.

6. $\square$ En una serie de sumas de números reales, el orden en que éstas se realizan es de suma importancia.

7. $\square$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$.

8. $\square$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x - y) \cdot z = x \cdot (-z) + y \cdot (-z)$.

9. $\square$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) \cdot z = y \cdot z + x \cdot z$.

10. $\square$ $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) \cdot z = (x + z) \cdot (y + z)$.

11. $\square$ Existe un número real que sumado a cualquier otro da como resultado este último.

12. $\square$ Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la ecuación $a - x = a$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

13. $\square$ Si un número $x \in \mathbb{R}$ es neutro para la suma, entonces su inverso aditivo también lo es.

14. $\square$ El elemento neutro en los reales para la suma es único. Se le denota 0.

15. $\square$ Si un número $x \in \mathbb{R}$ es neutro para la suma, entonces su inverso multiplicativo también lo es.

16. $\square$ Existe un número real, distinto de 0, que multiplicado con cualquier otro da como resultado este último.

17. $\square$ Si un número real x es neutro para la multiplicación, entonces su inverso aditivo también lo es.

18. $\square$ Si un número real x es neutro para la multiplicación, entonces su inverso multiplicativo también lo es.

19. $\square$ Dado $a \in \mathbb{R}$ la ecuación $a \cdot x = a$ siempre tiene solución en $\mathbb{R}$.

20. $\square$ El elemento neutro en los reales para la multiplicación es único. Se le denota 1.

21. ☐ Dado un número real cualquiera x, existe otro que al sumarlo con x resulta 0.

22. ☐ Dado $x \in \mathbb{R}$ la ecuación $x + y = 0$ tiene más de una solución $y \in \mathbb{R}$.

23. ☐ El inverso aditivo de cualquier número real x es único. Se denota $-x$.

24. ☐ Existe un número $x \in \mathbb{R}$ que es inverso aditivo de más de un número real.

25. ☐ Existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ todos distintos entre sí, tales que x_1 es el inverso aditivo de x_2 y x_2 es el inverso aditivo de x_3.

26. ☐ Dado un número real cualquiera x con $x \neq 0$, existe otro que al multiplicarlo por x resulta 1.

27. ☐ Existe un número $x \in \mathbb{R}$ que es inverso multiplicativo de más de un número real.

28. ☐ El inverso multiplicativo de cualquier número real x, distinto de 0, es único. Se denota x^{-1}.

29. ☐ Dado $x \in \mathbb{R}$ la ecuación $x \cdot y = 1$ siempre tiene una solución $y \in \mathbb{R}$.

30. ☐ No existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x = x + x = 0$.

31. ☐ Existe un número real que multiplicado por cualquier otro resulta en él mismo.

32. ☐ El 0 no posee inverso aditivo.

33. ☐ El 0 posee un inverso multiplicativo, pero no es único.

34. ☐ El 0 no posee inverso multiplicativo.

35. ☐ El 1 posee inverso multiplicativo.

36. ☐ Existen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ todos distintos entre sí, tales que x_1 es el inverso multiplicativo de x_2 y x_2 es el inverso multiplicativo de x_3.

37. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación $a + x = b$ siempre pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

38. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $a + x = b$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

39. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

40. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $a \cdot x = b$ puede tener más de una solución en $\mathbb{R}$.

41. ☐ Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces necesariamente $b = c$.

42. ☐ Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \cdot b = a \cdot c$, entonces necesariamente $b = c$.

43. ☐ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, se tiene que 0 es siempre solución de la ecuación $a \cdot x + b = 0$.

44. $\square$ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la solución de la ecuación $a \cdot x + b = 0$ es $x = -\frac{b}{a}$.

45. $\square$ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x + y = 0$, entonces necesariamente $x = 0 \vee y = 0$.

46. $\square$ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x \cdot y = 0$, entonces necesariamente $x = 0 \vee y = 0$.

47. $\square$ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x + y = 1$, entonces necesariamente $x = 0 \vee y = 0$.

Guía de Ejercicios

1. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales, propuestas en la tutoría:

(a) El elemento neutro para el producto es único.

(b) El inverso multiplicativo de un número real es único.

(c) La ecuación $ax = b$, con $a \neq 0$, tiene una única solución en $\mathbb{R}$. Está dada por $x = ba^{-1}$.

(d) Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Cada una de las siguientes igualdades es verdadera en el sistema de los números reales. Indique la razón de su veracidad, respecto de los axiomas y propiedades vistos.

(a) $2 + (3 + 5) = (2 + 5) + 3$.

(b) $0 + 5 = 5$.

(c) $(x + y) + z = z + (y + x)$.

(d) $(x + 2) \cdot y = y \cdot x + 2 \cdot y$.

(e) $(4^{-1} \cdot 4) - 1 = 0$.

3. En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $5 = 4+1$ y $6 = 5+1$. Usando sólo los axiomas de los números reales y el hecho que $2 \neq 0$, pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada unos de ellos:

(a) $3 + 2 = 5$.

(b) $3 \cdot 2 = 6$.

(c) $4 \cdot 2^{-1} = 2$.

(d) $5 - 3 = 2$.

(e) $(4 \cdot 3) \cdot 2^{-1} - 2 = 4$.

4. Dadas las siguientes secuencias de igualdades, determine los axiomas y las propiedades que las hacen correctas:

(a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(ab) + (a(-b)) &= a \cdot (b + (-b)) \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(1-x)y + yx &= (1 \cdot y + (-x)y) + yx \\
&= (y + -(xy)) + yx \\
&= y + (-xy + yx) \\
&= y + (-xy + xy) \\
&= y + 0 \\
&= y
\end{aligned}$$

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a(a+b) + b(a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

(d) Dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
a + 0 \cdot a &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\
&= a(1+0) \\
&= a \cdot 1 \\
&= a
\end{aligned}$$

(e) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} \\
&= (ab^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot 1)d^{-1} \\
&= (ab^{-1})(dd^{-1}) + (c(bb^{-1}))d^{-1} \\
&= (ab^{-1})(d^{-1}d) + cb(b^{-1}d^{-1}) \\
&= ad(b^{-1}d^{-1}) + cb(b^{-1}d^{-1}) \\
&= ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} \\
&= (ad+bc)(bd)^{-1} \\
&= \frac{ad+bc}{bd}
\end{aligned}$$

5. Demuestre las siguientes igualdades de números reales, indicando claramente los axiomas o propiedades usados:

(a) $a + a = 2 \cdot a$.

(b) $a - (b - c) = a + (-b) + c$

(c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(d) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(e) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

(f) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(g) $(x+\frac{b}{2})^2+c-(\frac{b}{2})^2=x^2+bx+c$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones (x es la incógnita).

(a) $2x+3=0$.

(b) $3x+a=2(x+a)$ (deje su resultado en términos de a).

(c) $(x+1)^2=(x+2)(x-4)$.

(d) $(x+a)(x-a)=x^2-ax$ (deje su resultado en términos de a).

(e) $x(-x+2)-3(x-6)=-x(x-1)-(-(x+2)-7)$.

(f) $(2x-7)^2-x(3-x)=3(x+1)^2+2(1-x)^2$.

(g) $ax=0$, para $a\neq 0$.

(h) $(x-2)^2=0$.

(i) $(x+2)(x-3)=0$.

7. Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $2\in C$.

(A2) Si $x\in C$, entonces $3x+1\in C$.

(A3) Si $x,y\in C$, entonces $x+y\in C$.

(A4) $3\notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

(a) $9\in C$.

(b) $1\notin C$.

(c) Si $5\in C$, entonces $22\in C$.

(d) Si $x,y\in C$, entonces $3x+1+3y\in C$.

(e) Si $x\in C$, entonces $-x\notin C$.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \neq 0,\ (x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$.

(b) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \neq 0,\ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(c) (20 min.) Usando **(b)**, demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b, d \neq 0,\ ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$.

(d) (20 min.) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^2 = 0 \implies a = 0$.

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**)

(a) (15 min.) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) (25 min.) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a+b)d] + [-((c+d)b)] = 0.$$

(c) (15 min.) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

P3. (20 min.) Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \quad \implies \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda w,\ y = \lambda z.$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto último implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $3 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mecionados, utiliza:

(a) (5 min.) $1 \notin C$.

(b) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$.

(c) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$.

(d) (5 min.) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $\left(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C\right)$.

(e) (5 min.) No existe $x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$.

SEMANA 2:

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Axiomas de Orden

Los axiomas de orden de los números reales describen cómo se comparan los números dentro del conjunto de los reales y permiten hablar de relaciones como mayor que o menor que. Estos axiomas hacen posible trabajar con desigualdades, intervalos y propiedades fundamentales del orden.

2.1 Axiomas de Orden de los Reales

Admitimos la existencia de una relación "$<$" entre los números reales, que establece un ordenamiento de los mismos. Establecer un ordenamiento implica que la relación "$<$" satisface ciertas reglas o axiomas.

Axioma 6. (de la tricotomía)
Para todo par de números reales $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

(a) $x < y$,

(b) $y < x$,

(c) $y = x$.

Axioma 7. (Transitividad)
Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ e $y < z$, se cumple que $x < z$.

Axioma 8a. (Preservación de orden bajo la suma)
Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, se cumple que:

$$x + z < y + z, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Axioma 8b. (Preservación de orden bajo el producto)
Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, se cumple que:

$$\text{Si } 0 < z \text{ entonces } x \cdot z < y \cdot z.$$

Ahora que conocemos la relación "$<$", estamos en condiciones de incorporar las definiciones de "$>$", "$\leq$" y "$\geq$".

Definición (Relaciones "$>$", "$\leq$", "$\geq$") Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Diremos que:

- $x > y \iff y < x$.
- $x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$.
- $x \geq y \iff (x > y) \vee (x = y) \iff y \leq x$.

2.2 Propiedades de la desigualdad

La primera propiedad que introduciremos nos da una caracterización alternativa de las relaciones "$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$".

Propiedad 2.1. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

(1) $x < y \iff x - y < 0 \iff y - x > 0$.

(2) $x \leq y \iff x - y \leq 0 \iff y - x \geq 0$.

Demostración. **(1)** Probaremos primero que $x < y \iff x - y < 0$. Por existencia del inverso de la suma, sabemos que existe $-y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} x < y \quad &\implies \quad x + (-y) < y + (-y) && \text{por Preservación de orden bajo la suma } \textbf{(Axioma 8a)}, \\ &\implies \quad x - y < 0 && \text{por existencia de inverso de la suma.} \end{aligned}$$

De la misma forma, se tiene que

$$\begin{aligned} x - y < 0 \quad &\implies \quad (x - y) + y < y && \text{por Preservación de orden bajo la suma } \textbf{(Axioma 8a)}, \\ &\implies \quad x < y && \text{por existencia de inverso de la suma.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, probamos que $x < y \iff x - y < 0$.

Nos resta probar que $x < y \iff y - x > 0$. Usaremos la existencia de $-x \in \mathbb{R}$ gracias al axioma de la existencia del elemento inverso de la suma. Tenemos que

$$\begin{aligned} x < y \quad &\implies \quad x + (-x) < y + (-x) && \text{por Preservación de orden bajo la suma } \textbf{(Axioma 8a)}, \\ &\implies \quad 0 < y - x && \text{por existencia de inverso de la suma.} \\ &\iff \quad y - x > 0 && \text{por definición de "}>\text{".} \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
y - x > 0 \quad &\iff \quad 0 < y - x && \text{por definición de ">"}, \\
&\implies \quad x < y - x + x && \text{por Preservación de orden} \\
& && \text{bajo la suma } \textbf{(Axioma 8a)}, \\
&\implies \quad x > y && \text{por existencia de inverso de la suma.}
\end{aligned}
$$

Hemos probado que $x < y \iff y - x > 0$, lo que concluye $x < y \iff x - y < 0 \iff y - x > 0$.

(2) La prueba del segundo ítem queda de ejercicio.

□

Propiedad 2.2. *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $x + z < y + z$ entonces $x < y$.*

Demostración. Empezaremos asumiendo que $x + z < y + z$ y, por medio de implicancias, concluiremos que $x < y$. Notemos que, por la existencia del inverso de la suma (Axioma 5a), sabemos que existe $-z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& x + z < y + z \\
\implies \quad & (x + z) + (-z) < (y + z) + (-z) && \text{por Preservación de orden} \\
& && \text{bajo la suma } \textbf{(Axioma 8a)}, \\
\implies \quad & x + (z + (-z)) < y + (z + (-z)) && \text{por axioma de Asociatividad,} \\
\implies \quad & x + 0 < y + 0 && \text{por elemento inverso de la suma,} \\
\implies \quad & x < y && \text{por elemento neutro para la suma.}
\end{aligned}
$$

□

Propiedad 2.3. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $a < b$. Entonces, por Preservación de orden bajo la suma (**Axioma 8a**), tenemos que

$$a + c < b + c. \tag{2.1}$$

Por otro lado, por hipótesis, sabemos que $c < d$. Por Preservación de orden bajo la suma (**Axioma 8a**),

$$c + b < d + b.$$

En particular, por Conmutatividad,

$$b + c < b + d. \tag{2.2}$$

Por lo tanto, por Transitividad de la relación de orden (**Axioma 7**), se concluye que

$$a + c < b + d.$$

□

Observación: La propiedad anterior nos dice que *podemos sumar desigualdades.*

Propiedad 2.4. *Sean* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Si* $x < y \wedge z < 0$, *entonces* $x \cdot z > y \cdot z$.

Demostración. Notemos que, gracias a la distributividad y asociatividad, tenemos que

$$z \cdot x - z \cdot y = z(x - y) = (-z)(y - x)$$

Como $x < y$, por Propiedad 2.1, tenemos que $y - x > 0$. En particular, implica que $(-z)(y - x) > 0$. Por lo tanto, por distributividad, $z(x - y) = z \cdot x - z \cdot y > 0$. Usando de nuevo Propiedad 2.1, concluimos que $zx > zy$. □

Propiedad 2.5. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $(x < 0) \wedge (y > 0) \implies x \cdot y < 0$

(2) $(x < 0) \wedge (y < 0) \implies x \cdot y > 0$

Demostración. La prueba es una consecuencia (casi) inmediata de la Propiedad 2.4. En efecto:

(1) Tenemos que,

$$\begin{aligned} x < 0 \wedge 0 < y &\implies 0 \cdot x > y \cdot x && \text{por Propiedad 2.4,} \\ &\implies 0 > x \cdot y. \end{aligned}$$

(2) De manera similar, tenemos que

$$\begin{aligned} x < 0 \wedge y < 0 &\implies x \cdot y > 0 \cdot y && \text{por Propiedad 2.4,} \\ &\implies x \cdot y > 0. \end{aligned}$$

□

Antes de continuar: Otra consecuencia inmediata de la Propiedad 2.4 es que para todo $x \in \mathbb{R}$:

(1) $x > 0 \iff -x < 0$.

(2) $x < 0 \iff -x > 0$.

¿Cómo lo probaría?

Usaremos la consecuencia de la Propiedad 2.4 para probar las siguientes dos propiedades:

Propiedad 2.6. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. *En particular,* $1 > 0$.

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{R} &\implies x > 0 \vee x = 0 \vee -x > 0 && \text{por tricotomía (\textbf{Axioma 6}),}\\
&\implies x \cdot x > 0 \vee x^2 = 0 \vee (-x)(-x) > 0 && \text{por preservación de orden}\\
& && \text{bajo el producto (\textbf{Axioma 8b}),}\\
&\implies x^2 > 0 \vee x^2 = 0\\
&\implies x^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Comentario: $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 \geq 0$, pero $1 \neq 0$, por lo tanto $1 > 0$. $\square$

Propiedad 2.7. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Si* $0 < a < b$ *y* $0 < c < d$ *entonces* $a \cdot c < b \cdot d$.

Demostración. Por la definición de "$<$" y por la preservación del orden bajo la suma y el producto (**Axioma 8a** y **Axioma 8b**), obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a < b \implies b - a > 0 \\ 0 < c < d \implies d - c > 0 \end{array}\right\} \implies d(b-a) + (d-c)a > 0,$$

desarrollando la última expresión (usando la distributividad y la asociatividad) obtendremos $d \cdot b - a \cdot c > 0$. Por Propiedad 2.1, concluimos que $a \cdot c < b \cdot d$. $\square$

Observación: La propiedad anterior nos dice que *podemos multiplicar las desigualdades positivas* sin que cambie la desigualdad.

Propiedad 2.8. *Sea* $x \in \mathbb{R}$.

(1) $x > 0 \implies x^{-1} > 0$.

(2) $x < 0 \implies x^{-1} < 0$.

Demostración. Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x^{-1} = x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x = (x^{-1})^2 \cdot x.$$

Ya probamos en la Propiedad 2.6 que el cuadrado de cualquier número real es positivo. En particular, como $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tenemos que $(x^{-1})^2 > 0$. Por la preservación de orden bajo el producto (**Axioma 8b**), sabemos que

$$\begin{cases} (x^{-1})^2 \cdot x > 0 & \text{si } x > 0, \\ (x^{-1})^2 \cdot x < 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$\square$

Propiedad 2.9. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x < y$. Entonces, $x^{-1} > y^{-1}$.*

Demostración. Veamos que $x^{-1} - y^{-1} > 0$:

$$x^{-1} - y^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} = (y-x) \cdot x^{-1}y^{-1}.$$

Como $0 < x < y$, entonces $(y - x) > 0$. Por Propiedad 2.8, también se cumple que $x^{-1} > 0$ y $y^{-1} > 0$. Se concluye que $x^{-1} - y^{-1} > 0$. Es decir, $y^{-1} < x^{-1}$.

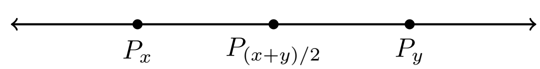
□

2.3 Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

En virtud de la relación menor o igual definida en $\mathbb{R}$, se puede pensar en ordenar esquemáticamente los números reales de menor a mayor. Los números reales se representan sobre una recta horizontal tal que a cada x en $\mathbb{R}$ se le asocia un punto P_x sobre la recta siguiendo las siguientes convenciones:

(1) Si $x < y$ entonces P_x esta a la izquierda de P_y

(2) Si $x < y$ entonces $P_{(x+y)/2}$ es punto medio del trazo $\overline{P_xP_y}$.



Definición (Intervalos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal es que $a \leq b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llamaran intervalos:

- Intervalo abierto a coma b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

- Intervalo cerrado a coma b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

- Intervalo a coma b cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

- Intervalo a coma b cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

- Intervalos no acotados:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}.$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}.$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}.$$

Notación: Para denotar un intervalo abierto (a, b), también se puede ocupar los paréntesis $]a, b[$.

Definición (Reales positivos y reales negativos) De ahora en más, definiremos como $\mathbb{R}_{>0}$ el **conjunto de los reales positivos**, esto es,

$$\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty).$$

Más aun, también definimos el **conjunto de los reales negativos** $\mathbb{R}_{<0}$, dado por

$$\mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0).$$

Observación:

(1) Si $a = b$ entonces $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.

(2) Se puede anotar al conjunto $\mathbb{R}$ como el intervalo no acotado $(-\infty, +\infty)$.

(3) Sea I un intervalo y $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $[x_1, x_2] \subseteq I$.

2.4 Inecuaciones

Introducción

Una inecuación es una desigualdad de números reales en la que intervienen una o más cantidades genéricas desconocidas. Resolver una inecuación consiste en determinar para qué valores reales de las incógnitas genéricas se satisface la desigualdad.

Dependiendo del número de cantidades genéricas desconocidas hay inecuaciones de una, dos o más incógnitas, y entre las de una incógnita las hay de primer, segundo, tercer o mayor grado.

Al resolver una inecuación de una incógnita suele buscarse el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la desigualdad se cumpla. Este conjunto se llama **conjunto solución de la inecuación**.

Inecuaciones de primer grado

Son de la forma

$$ax + b < 0$$

donde a y b son números reales constantes y $a \neq 0$. La **incógnita** es x. El signo $<$ puede ser también $>$, $\leq$ o $\geq$; sin embargo, la forma de resolver la inecuación no cambia.

¿Cómo resolver una inecuación del tipo $ax + b < 0$?

$$ax + b < 0 \iff ax < -b.$$

(1) Si $a > 0$, entonces la inecuación queda $x < -\dfrac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$.

(2) Si $a < 0$, entonces la inecuación queda $x > -\dfrac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in \left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

¡Importante!

- Al resolver la inecuación, encontramos un ***conjunto de soluciones***. En efecto, siempre que se resuelven inecuaciones, se obtiene lo que llamamos un **conjunto solución**.
- Para encontrar el conjunto solución, es importante partir desde la inecuación y trabajar con **equivalencias** hasta llegar al resultado final. Sino, no podríamos asegurarnos de que el resultado sea efectivamente solución de la ecuación.

> DEFINICIÓN (PUNTOS CRÍTICOS) Dados $a, b, \in \mathbb{R}$, consideremos la expresión $ax + b$, donde $x \in \mathbb{R}$ es incógnita. Llamaremos **punto crítico** de $ax + b$ al punto donde $ax + b = 0$, esto es,
>
> $$x = -\frac{b}{a}.$$

Observación: La razón por la que los puntos críticos nos interesan cuando resolvemos inecuaciones del tipo $ax + b < 0$ es porque la expresión $ax + b$ *cambia de signo* en $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 2.1.

$$5(x-1) > 2 - (17 - 3x)$$

Solución La idea es transformar la inecuación original por medio de *equivalencias* hasta encontrar el conjunto solución.

$$\begin{aligned} & 5(x-1) > 2-(17-3x) & \\ \iff & 5x-5 > -15+3x & \\ \iff & 2x > -10 & \\ \iff & x > -5 & \text{porque } 2>0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **conjunto solución** será $x \in (-5, \infty)$.

Inecuaciones de grado mayor a 1

Enunciaremos un método para resolver algunas inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

donde el signo $<$ puede ser también $>$, $\leq$ o $\geq$.

Nos remitiremos primeramente a los casos en los que $P(x)$ y $Q(x)$ son productos de factores de primer orden del tipo $ax+b$, esto es,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)}{(c_1x+d_1)(c_2x+d_2)\ldots(c_mx+d_m)},$$

$a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots n$, $j = 1, \cdots, m$.

Comencemos por observar que los factores del tipo $ax+b$ cambian de signo en los puntos críticos: $x = -\dfrac{b}{a}$.

El método para resolver estas inecuaciones es la siguiente secuencia:

- *Paso 1:* Determinar todos los puntos críticos mediante la ecuación $x = -\dfrac{b}{a}$.
- *Paso 2:* Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar intervalos abiertos determinados por estos puntos críticos (incluyendo intervalos infinitos). Como sabemos que $P(x)$ y $Q(x)$ sólo pueden cambiar de signo en los puntos críticos, la expresión
$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$
no cambiará de signo en los intervalos abiertos obtenidos.
- *Paso 3:* Analizar el signo de la expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en los intervalos encontrados en el paso 2 y escoger aquellos que resuelvan de buen modo la inecuación.
- *Paso 4:* En los caso en que los signos de la inecuación sean $\leq$ o $\geq$, deben agregarse a la solución los puntos críticos del numerador, ya que en esos puntos se anula la fracción.

Ejemplo 2.2.
Apliquemos lo anterior al siguiente ejemplo:

$$\frac{x+1}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x}$$

Solución Trabajamos con equivalencias hasta llegar a una expresión que nos permita usar el método:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x} \\
\iff \quad & \frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x} \leq 0 \\
\iff \quad & \frac{x+4}{x} - \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \\
\iff \quad & \frac{x^2 - x + 4x - 4 - x^2 - x}{x(x-1)} \leq 0 \\
\iff \quad & \frac{2x-4}{x(x-1)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Ahora que obtuvimos una expresión del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

podemos usar el método descrito más arriba.

- *Paso 1: Determinar todos los puntos críticos.*

  Buscamos los puntos críticos de cada factor de primer orden: $2x-4$, x y $x-1$. Sus puntos críticos son:

  - Para $2x-4$ el punto crítico es 2.
  - Para $x-1$ el punto crítico es 1.
  - Para x el punto crítico es 0.

- *Paso 2: Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar intervalos abiertos.*
  Los puntos críticos son $0, 1, 2$. Forman los intervalos abiertos:

  $$(-\infty, 0), \quad (0,1), \quad (1,2) \quad \text{y} \quad (2, \infty).$$

- *Paso 3: Analizar el signo de la expresión* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *en los intervalos encontrados en el paso 2 y escoger aquellos que resuelvan de buen modo la inecuación.*

  Es conveniente formar una tabla donde analizaremos por parte el signo por intervalo de cada término de la forma $ax+b$ que participa, y luego ver el signo de la expresión total por medio de la regla de los signos para la multiplicación. En este ejemplo la tabla será:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$x-1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$2x-4$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\dfrac{2x-4}{x(x-1)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Esto nos dice que

$$\frac{2x-4}{x(x-2)} < 0 \quad \text{cuando} \quad x \in (-\infty,0) \cup (1,2).$$

Sin embargo, nos interesaba encontrar todos los x que satisfagan

$$\frac{2x-4}{x(x-2)} \leq 0.$$

Por lo tanto, podría faltar algún x que anule la expresión. Para ello, recurrimos al útimo paso.

- *Paso 4: En los caso en que los signos de la inecuación sean $\leq$ o $\geq$, deben agregarse a la solución los puntos críticos del numerador.*

  En nuestro caso, en el punto crítico $x = 2$, la expresión vale 0. Por lo tanto, cumple la desigualdad (más bien, la igualdad) y debemos agregarla a nuestro conjunto solución. El caso de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ es distinto, *debemos quitarlos del conjunto solución*, pues el denominador se anula, obteniendo división por 0, lo cual no puede ser.

  Concluimos que

$$\frac{2x-4}{x(x-2)} < 0 \quad \text{cuando} \quad x \in (-\infty,0) \cup (1,2].$$

  En otras palabras, el **conjunto solución** será:

$$(-\infty,0) \cup (1,2]\,.$$

Factorización de términos cuadráticos

Si la inecuación no aparece factorizada por factores de primer grado, se puede intentar factorizar la expresión, o bien intentar conocer (sin factorizar) los puntos donde estos factores cambian de signo. En este último caso, se puede resolver la inecuación con el método indicado anteriormente.

Por ejemplo para los factores de segundo grado se tiene:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

Llamemos Δ al factor b^2-4ac. Dependiendo del signo de Δ se tienen tres posibilidades:

(1) Si $\Delta>0$ entonces la expresión es factorizable según factores de primer grado de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Aplicando la factorización suma por su diferencia obtendremos la expresión en factores de primer grado:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Los puntos críticos de la última expresión son $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, con lo cual volvemos al caso ya estudiado. Es decir:

- ax^2+bx+c tiene el signo de a si $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$.
- ax^2+bx+c tiene el signo de $-a$ si $x\in(x_1,x_2)$.

(2) Si $\Delta=0$, entonces solo hay un punto crítico: $x^*=-\dfrac{b}{2a}$ y se tiene que: ax^2+bx+c tiene el signo de a si $x\in(-\infty,x^*)\cup(x^*,\infty)$.

(3) Si $\Delta<0$ entonces no hay puntos críticos y en este caso ax^2+bx+c tiene el signo de a para todo $x\in\mathbb{R}$.

Luego, el factor ax^2+bx+c puede ser simplificado en la inecuación, cuidando el efecto que el signo de este factor produce en el sentido de la desigualdad.

Si en la inecuación aparecen factores de mayor grado, su resolución estará condicionada al hecho de si puede o no factorizar hasta factores de primer y segundo grado o si se conocen sus cambios de signo.

Ejemplo 2.3.

Resolvamos las siguientes inecuaciones:

(1) $2x^2 + 3x + 1 < 0$

(2) $4x - 5 - x^2 < 0$

(3) $x^3 < x$

(4) $\dfrac{22}{2x-3} + \dfrac{23x+26}{4x^2-9} > \dfrac{51}{2x+3}$

Solución

(1) $2x^2 + 3x + 1 < 0$. Entonces, $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$. Por lo tanto, los puntos críticos quedan determinados por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{4} \implies \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Luego,

$$2x^2 + 3x + 1 < 0 \iff x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

(2) $4x - 5 - x^2 < 0 \iff -x^2 + 4x - 5 < 0$. Entonces, $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - (4 \cdot -1 \cdot -5) = 16 - 20 = -4 < 0$. Luego, el signo del factor es constante e igual al signo de $a = -1$; es decir, siempre negativo. Por lo tanto, la solución de la inecuación es:

$$4x - 5 - x^2 < 0 \iff x \in \mathbb{R}.$$

(3) Reescribamos la inecuación:

$$\begin{aligned} x^3 < x &\iff x^3 - x < 0 \\ &\iff x(x^2 - 1) < 0 \\ &\iff x(x-1)(x+1) < 0 \end{aligned}$$

Usaremos el primer método visto en el apunte. Los puntos críticos de los factores son 0, 1 y -1, que forman los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1 + \infty)$. Evaluemos el signo de la expresión $x(x-1)(x+1)$ en cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$x - 1$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$x + 1$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$x^3 - x$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego, la solución es

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

(4) Reescribamos la inecuación:

$$\begin{aligned}
6x \leq \frac{8x-6}{5x} &\iff \frac{4x-3}{6x} - \frac{8x-6}{5x} \leq 0 \\
&\iff \frac{(20x-15)-(48x-36)}{30x} \leq 0 \\
&\iff \frac{-28x+21}{30x} \leq 0 \\
&\iff \left(-\frac{7}{30}\right)\left(\frac{4x-3}{x}\right) \leq 0 \\
&\iff \frac{4x-3}{x} \geq 0
\end{aligned}$$

Volvimos a obtener una expresión que podemos analizar con el primer método. Los puntos críticos de los factores de primer grado son 0 y $\frac{3}{4}$. Estos puntos críticos determinan los intervalos $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$. Analicemos el signo de la expresión $\frac{4x-3}{x}$ en cada uno de esos intervalos:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$
$4x-3$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
x	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{4x-3}{x}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Además, el punto crítico $x = \frac{3}{4}$ anula el numerador de la fracción y, por ende, es también solución de la inecuación. Luego, la solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

Ejercicios 2.1: **(1)** Resuelva las siguientes inecuaciones:

(a) $6x^6 - x^3 < x^4$.

(b) $\frac{4x-3}{6x} \leq \frac{8x-6}{5x}$.

(c) $\frac{x^9+x}{x^2-3x+2} < 0$.

(2) Determine los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^8+2x^7-8x^6}{x^2-4x+3} > 0\right\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 11x^2 + 10x < 10x^3 - 12x^2 + 82x > 0\}$.

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{40}{x^2 + x - 12} < -4\right\}$.

2.5 Módulo o valor absoluto

Definición (Módulo o valor absoluto) Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos **módulo de** x al real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ejemplos:

(1) $|2| = 2$

(2) $|-2| = -(-2) = 2$

(3) $|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } 1 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 1, & \text{si } 1 - x^2 < 0. \end{cases}$

Pero

$$1 - x^2 \geq 0 \iff (1 - x)(1 + x) \geq 0 \iff x \in [-1, 1].$$

Entonces,

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \in [-1, 1], \\ x^2 - 1, & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Propiedad 2.10. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $|x| \geq 0$.

(2) $|x| = 0 \iff x = 0$.

(3) $|x| = |-x|$.

(4) $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

(5) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(6) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

(8) *Sea $a \in \mathbb{R}$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$.*

(9) *Sea* $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee a \leq x \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

(10) *Sean* $x_0, a \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| \leq a \iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \iff x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

(11) *Sean* $x_0, a \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| \geq a \iff x \leq x_0 - a \vee x \geq x_0 + a \iff x \in (-\infty, x_0 - a] \cup [x_0 + a, \infty)$.

(12) **[Desigualdad Triangular]** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Observación: La desigualdad triangular es una de las propiedades más importantes del módulo. Es cierto que en este capítulo no lo usaremos mucho, pero es muy importante cuando se ve *sucesiones* y *límite de funciones*. Más aun, será muy útil en otros cursos más adelante.

Más importante que la demostración de las últimas propiedades, es lograr entenderlas e internalizarlas a cabalidad, ya que serán una herramienta muy importante para la resolución de **inecuaciones que contengan expresiones con módulo**.

Demostración de algunas propiedades del módulo

(1) Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\iff x \geq 0 \vee x < 0, && \text{por Tricotomía,} \\ &\implies |x| = x \geq 0 \vee |x| = -x > 0, \\ &\implies |x| \geq 0 \vee |x| > 0, \\ &\implies |x| \geq 0. \end{aligned}$$

(2) Primer paso: probemos que $x = 0 \implies |x| = 0$.

$$x = 0 \implies |x| = x = 0 \implies |x| = 0.$$

Segundo paso: probemos que $|x| = 0 \implies x = 0$.

$$|x| = 0 \implies (x = 0 \vee -x = 0) \implies x = 0.$$

(5) Debemos demostrar que, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\implies x \geq 0 \vee x < 0, && \text{por Tricotomía,} \\ &\implies x = |x| \vee -x = |x|, \\ &\implies -|x| \leq x = |x| \vee -|x| = x < |x|, \\ &\implies -|x| \leq x \leq |x| \vee -|x| \leq x \leq |x|, \\ &\implies -|x| \leq x \leq |x|. \end{aligned}$$

(8) Debemos demostrar: $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$.
Si $a < 0$, la equivalencia es evidente, pues

$$|x| \leq a \iff x \in \mathbb{R} \iff -a \leq x \leq a.$$

Si $a \geq 0$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
|x| \leq a &\iff \Big(x \geq 0 \vee x < 0\Big) \wedge |x| \leq a, \\
&\iff \Big(0 \leq x = |x| \leq a\Big) \vee \Big(-a \leq -|x| = x < 0\Big), \\
&\iff \Big(0 \leq x \leq a\Big) \vee \Big(-a \leq x < 0\Big), \\
&\iff \Big(0 \leq x \wedge -a \leq x \leq a\Big) \vee \Big(x < 0 \wedge -a \leq x \leq a\Big), \\
&\iff \Big(0 \leq x \vee x < 0\Big) \wedge -a \leq x \leq a, \\
&\iff -a \leq x \leq a.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.
Resolvamos

$$2|x| < |x-1|.$$

Para resolver este tipo de inecuaciones, se pueden usar dos métodos alternativos. El primero, usa las propiedades del módulo en forma reiterada. El segundo método, consiste en separar la inecuación con módulo en un conjunto de inecuaciones fáciles, sin módulo. Veamos en forma detallada cómo usar estas dos técnicas en este ejercicio.

Técnica 1 (uso de las propiedades del módulo):

Esta técnica se usa del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
2|x| < |x-1| &\iff -|x-1| < 2x < |x-1|, \\
&\iff |x-1| > -2x \wedge |x-1| > 2x, \\
&\iff [x-1 < 2x \vee x-1 > -2x] \wedge [x-1 < -2x \vee x-1 > 2x], \\
&\iff [x > -1 \vee 3x > 1] \wedge [3x < 1 \vee x < -1], \\
&\iff [x > -1] \wedge \left[x < \frac{1}{3}\right], \\
&\iff x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Técnica 2 (uso de los puntos críticos:)

Esta técnica comienza buscando todos los puntos en los cuales los factores bajo los módulos cambian de signo. Si miramos la expresión

$$2|x| < |x-1|,$$

vemos claramente que los puntos críticos son el 0 para el primer módulo, y el 1 para el segundo. Estos puntos críticos se ordenan de menor a mayor, y con ellos se forman los intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ y ,$(1, +\infty)$.

Con estos intervalos se puede decir que la inecuación es equivalente a las frases lógicas siguientes:

- Hay que encontrar todos los reales que cumplan $2|x| < |x-1|$.
- Hay que encontrar todos los reales en $(-\infty, 0] \cup (0, 1] \cup (1, +\infty)$ que cumplan $2|x| < |x-1|$.
- Hay que encontrar todos los reales en $(-\infty, 0]$ que cumplan $2|x| < |x-1|$, mas todos los reales en $(0, 1]$ que cumplan $2|x| < |x-1|$, mas todos los reales en $(1, +\infty)$ que cumplan $2|x| < |x-1|$.

En la última frase lógica anterior está la clave del problema. En efecto, lo que debe hacerse es resolver la inecuación en cada uno de los intervalos considerados y al final reunirse todas las soluciones. Lo interesante es que en cada intervalo, los módulos pueden eliminarse, ya que los argumentos que ellos encierran tienen signos constantes.

Veamos cómo opera este método en cada intervalo.

(1) En el intervalo $(-\infty, 0]$, los factores x y $x-1$ son ambos menores o iguales a cero. Por lo tanto, en este intervalo, la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff -2x < -(x-1), \\ &\iff 2x > x-1, \\ &\iff x > -1. \end{aligned}$$

Concluimos que, en este intervalo, la solución es el conjunto $(-1, 0]$.

(2) En el intervalo $(0, 1]$, el factor x es positivo pero el factor $x-1$ es negativo. Por lo tanto, en este intervalo, la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff 2x < -(x-1), \\ &\iff 3x < 1, \\ &\iff x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Luego, en este intervalo, la solución es $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(3) Finalmente, en el intervalo $(1, \infty)$, los factores x y $x-1$ son ambos positivos. Por lo tanto, en este intervalo, la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff 2x < (x-1), \\ &\iff x < -1. \end{aligned}$$

Esta inecuación tiene solución $(-\infty, -1)$ en $\mathbb{R}$, pero como la estamos resolviendo en el intervalo $(1, \infty)$, se deduce que la solución es $\emptyset$.

En consecuencia, la solución final de esta inecuación es

$$(-1, 0] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) = \left(-1, \frac{1}{3}\right).$$

Ejemplo 2.5.

$$|x^2 - |3 + 2x|| < 4.$$

Técnica 1 (uso de las propiedades de módulo):

$$\begin{aligned}
&|x^2 - |3 + 2x|| < 4 \iff -4 < x^2 - |3 + 2x| < 4,\\
&\iff |3 + 2x| < x^2 + 4 \wedge |3 + 2x| > x^2 - 4,\\
&\iff [-x^2 - 4 < 3 + 2x \wedge 3 + 2x < x^2 + 4] \wedge [3 + 2x < -x^2 + 4 \vee 3 + 2x > x^2 - 4],\\
&\iff x^2 + 2x + 7 > 0 \wedge x^2 - 2x + 1 > 0 \wedge [x^2 + 2x - 1 < 0 \vee x^2 - 2x - 7 < 0].
\end{aligned}$$

En cada inecuación de segundo grado se tiene:

$\Delta = -24 < 0 \implies ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + 7$ tiene el signo de a para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, $a = 1$, lo que implica que la solución es todo $\mathbb{R}$.

$\Delta = 0 \implies$ la solución no incluirá $x = 1$ ya que la expresión $x^2 - 2x + 1$ se anula y esto no puede ser. Además, el signo de $x^2 - 2x + 1$ nuevamente será el signo de $a = 1$, el cual es positivo. Por lo tanto, la solución será $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\Delta = 8 \implies$ la solución es $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$, intervalo donde el signo de x^2+2x-1 es el signo de $-a$. Como $a = 1 > 0$, será el intervalo donde $x^2 + 2x - 1 < 0$.

$\Delta = 32 \implies$ la solución es $(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$. Luego, la solución final de la inecuación es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap [(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}) \cup (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})\\
= (-1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + 2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Solución 2 (uso de puntos críticos):

Lo primero es buscar el punto crítico de $3 + 2x$, el cual es $-\frac{3}{2}$. Luego, el signo de $3 + 2x$ para $x < -\frac{3}{2}$ será negativo. Por lo tanto, debemos anteponer un signo $(-)$ a la expresión y sacar el módulo.
Si $x > -\frac{3}{2}$, la expresión será positiva, y sólo debemos retirar el módulo. Con esto, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&|x^2 - |3 + 2x|| < 4\\
&\quad \iff \left[x < -\frac{3}{2} \wedge |x^2 + 3 + 2x| < 4\right] \vee \left[x \geq -\frac{3}{2} \wedge |x^2 - 3 - 2x| < 4\right].
\end{aligned}$$

Ahora, completaremos cuadrado en las expresiones que tienen módulo:

$$\iff \left[x < -\frac{3}{2} \wedge |(x + 1)^2 + 2| < 4\right] \vee \left[x \geq -\frac{3}{2} \wedge |(x - 1)^2 - 4| < 4\right].$$

Luego, buscamos los puntos críticos de $(x+1)^2+2$ y $(x-1)^2-4$. La primera expresión será siempre positiva, así que se puede retirar el módulo. La segunda expresión tendrá dos puntos críticos $x = -1$ y $x = 3$.

Con los puntos críticos se crearán los intervalos definidos por los puntos críticos y se hará lo que corresponda con el módulo dependiendo del signo resultante de $(x-1)^2-4$ en cada intervalo. Realizando esto, tendremos:

$$\begin{aligned}\iff &\left[x < -\frac{3}{2} \wedge (x+1)^2 < 2\right] \vee \left[x \in [-\frac{3}{2}, -1) \wedge (x-1)^2 - 4 < 4\right] \\ &\vee \left[x \in [-1, 3] \wedge -(x-1)^2 + 4 < 4\right] \vee \left[x \in (3, \infty) \wedge (x-1)^2 - 4 < 4\right].\end{aligned}$$

Con esto último, ya no tenemos ninguna expresión con módulo. Ahora sólo faltará buscar el intervalo solución como se enseñó en un comienzo:

$$\begin{aligned}\iff &\left[x < -\frac{3}{2} \ \wedge \ x \in \left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)\right] \\ &\vee \left[x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \ \wedge \ x \in \left(1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}\right)\right] \\ &\vee \ [x \in [-1, 3] \ \wedge \ x \neq 1] \ \vee \ \left[x \in (3, \infty) \ \wedge \ x \in \left(1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Arreglando un poco los intervalos de solución, obtendremos

$$\begin{aligned}&\iff \left[x \in \left(-1-\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\right)\right] \ \vee \ \left[x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right)\right] \ \vee \ [x \in [-1, 3] \setminus \{1\}] \ \vee \ \left[x \in \left(3, 1+2\sqrt{2}\right)\right], \\ &\iff x \in \left(-1-\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ Todo número real no nulo, es estrictamente positivo, estrictamente negativo o ambos.

2. $\square$ Todo número real no nulo, es estrictamente positivo o estrictamente negativo, pero no ambos.

3. $\square$ El 0 es estrictamente positivo y estrictamente negativo a la vez.

4. $\square$ Toda suma de números reales estrictamente positivos es estrictamente positiva.

5. $\square$ Existen pares de números reales en $\mathbb{R}_{>0}$ tales que su suma es 0. Por ejemplo, un número y su inverso aditivo.

6. $\square$ La suma de números reales es cerrada en $\mathbb{R}_{>0}$.

7. $\square$ La multiplicación de números reales es cerrada en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Esto es, dados dos reales en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, su producto también está en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

8. $\square$ El inverso multiplicativo de un número estrictamente positivo no puede ser estrictamente positivo también.

9. $\square$ Toda multiplicación de números reales estrictamente positivos es estrictamente positiva.

10. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x < y$ si el real $y - x$ es estrictamente positivo.

11. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x < y$ si el real $y - x$ es distinto de 0.

12. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x < y$ si el real $x - y$ es estrictamente positivo.

13. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x \geq y$ si el real $x - y$ es distinto de 0.

14. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x \geq y$ si el real $x - y$ es estrictamente positivo, o 0.

15. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que $x \geq y$ si el real $x - y$ es estrictamente positivo.

16. $\square$ Un número real x es estrictamente positivo si $x > 0$.

17. $\square$ Si un número real x satisface que $x^{-1} > 0$, entonces es estrictamente positivo.

18. $\square$ Si un número real x satisface que $-x > 0$, entonces es estrictamente positivo.

19. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y < z$.

20. $\square$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se tiene que $x - z < y - z$.

21. □ Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, para cualquier $z \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + z < y + z$.

22. □ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, al multiplicar ambos por $a < 0$ se obtiene $ax - ay > 0$.

23. □ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, al multiplicar ambos por $a < 0$ se obtiene $ax > ay$.

24. □ Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, existe un número $a < 0$ tal que $ax = ay$.

25. □ Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, al multiplicar ambos por $a > 0$ se obtiene $ax \geq ay$.

26. □ Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, existe un número $a > 0$ tal que $ax = ay$.

27. □ Al multiplicar ambos lados de una relación de desigualdad, por un número estrictamente positivo, esta no cambia.

28. □ Existe un número real tal que al multiplicarlo por sí mismo, se obtiene el inverso aditivo de 1.

29. □ Al multiplicar un número real no nulo cualquiera por sí mismo, se obtiene un número estrictamente positivo.

30. □ Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $x + y < z + w$.

31. □ Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $x + z < y + w$.

32. □ Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $z < 0$, entonces $x < y - z$.

33. □ Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $xz < yw$.

34. □ Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ son todos positivos y tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $xz < yw$.

35. □ Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ con $x, z > 0$ y tales que $x < y$ y $z < w$, entonces $xz < yw$.

36. □ Al multiplicar dos números reales entre sí, ambos est. positivos o ambos est. negativos, se puede obtener tanto un número est. positivo como uno est. negativo.

37. □ Al multiplicar dos números reales entre sí, ambos est. positivos o ambos est. negativos, se obtiene un número estrictamente positivo.

38. □ Al multiplicar dos números reales entre sí, ambos est. negativos, se obtiene un número est. negativo.

39. □ Al multiplicar dos números reales cuya resta no sea 0, se obtiene siempre un número estrictamente negativo.

40. □ Al multiplicar dos números reales cuya resta no sea 0, es posible obtener un número estrictamente positivo.

41. □ Al multiplicar dos números reales, ambos no pertenecientes a $\mathbb{R}^*_+$, siempre se obtiene un número real estrictamente negativo.

42. $\square$ El inverso multiplicativo de un número real estrictamente negativo es un número estrictamente positivo.

43. $\square$ El inverso multiplicativo de un número real estrictamente positivo es un número estrictamente positivo.

44. $\square$ Al multiplicar un número estrictamente positivo por su inverso multiplicativo, se obtiene un número estrictamente positivo.

45. $\square$ Si dos números reales x, y satisfacen que $0 < x < y$, sus inversos multiplicativos satisfacen la relación opuesta, es decir $x^{-1} > y^{-1}$.

46. $\square$ Si dos números reales x, y satisfacen que $0 < x < y$, sus inversos multiplicativos satisfacen $x^{-1} < y^{-1}$.

47. $\square$ Sea x un número est. negativo. Como $x < 0$, luego $x^{-1} > 0$.

48. $\square$ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$, el intervalo $[a, b)$ contiene a b pero no a a.

49. $\square$ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$, entonces $[a, b)$ contiene siempre a $b - a$.

50. $\square$ Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, el intervalo $[a, b)$ contiene a a pero no a b.

51. $\square$ Dado un intervalo real I, si $x_1, x_2 \in I$ entonces $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in I$.

52. $\square$ Dado un intervalo real I, $x_1, x_2 \in I$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in I$.

53. $\square$ Dado un intervalo real I, $x_1, x_2 \in I$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$, entonces $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in I$.

54. $\square$ Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$, la inecuación $ax + b < 0$ tiene como solución $\left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right] \cup \left[\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

55. $\square$ Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, la inecuación $ax + b \geq 0$ tiene como solución $\left[-\dfrac{b}{a}, \dfrac{b}{a}\right]$.

56. $\square$ Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, la inecuación $ax + b < 0$ tiene como solución $\left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

57. $\square$ Si el módulo de un número real es 0, entonces necesariamente dicho número es 0.

58. $\square$ Si el módulo de un número real es estrictamente positivo, entonces dicho número es estrictamente positivo.

59. $\square$ El módulo de una multiplicación de números reales es igual a la multiplicación de los módulos de dichos reales.

60. $\square$ El módulo de una suma de números reales es igual a la suma de los módulos de dichos reales.

61. $\square$ Existe un par de números reales tales que el módulo de su suma es mayor estricta que la suma de sus módulos.

62. $\square$ Los números reales x que satisfacen $|x-1| \geq 3$ son aquellos del conjunto $[-2, 3]$.

63. $\square$ Los números reales x que satisfacen $|x-1| \geq 3$ son aquellos del conjunto $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

64. $\square$ Los números reales x que satisfacen $|x-1| \geq 3$ son aquellos del conjunto $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$.

Guía de Ejercicios

(1) Demuestre las siguientes relaciones de desigualdad:

- **(a)** Para todo $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^2 \geq 1+2x$.
- **(b)** Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- **(c)** Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
- **(d)** Para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $x + x^{-1} \geq 2$.
- **(e)** Para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $x^3 > 0$.

(2) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, demuestre las siguientes relaciones de desigualdad:

- **(a)** $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- **(b)** $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.
- **(c)** $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.
- **(d)** $(x+y)^2 - z \geq 4xy - z$.

(3) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, demuestre las siguientes relaciones de desigualdad:

- **(a)** $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$.
- **(b)** Si $x+y+z=1$, entonces $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{x}-1\right) \geq 8$.
- **(c)** Si $xyz = 1$, entonces $x+y+z \geq 3$.
- **(d)** $(x^2+x+1)(y^2+y+1)(z^2+z+1) \geq 27xyz$.

(4) Resuelva las siguientes inecuaciones, indicando explícitamente cada conjunto solución:

- **(a)** $5x - 3 \geq 2x + 1$.
- **(b)** $2x + 3 \leq 0$.
- **(c)** $4x + 1 > 3x$.
- **(d)** Dado $b \in \mathbb{R}$, $x + b \leq 2x + 3b$.
- **(e)** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $ax + b \leq 2b + 4x$. Indique cómo depende la solución de a y de b.

(5) Resuelva las siguientes inecuaciones, indicando explícitamente cada conjunto solución:

- **(a)** $(x-2)(x-3) \leq 0$.
- **(b)** Dado $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $(x+a)(x-a) < 0$.
- **(c)** $3x^2 < x - 5$.

(d) $2x^2 + 3x + 1 < 0$.

(e) $4x - 5 > x^2$.

(6) Resuelva las siguientes inecuaciones, indicando explícitamente cada conjunto solución:

(a) $\dfrac{2}{6x-5} < 0$.

(b) $\dfrac{x+2}{2x^2-3x} < 0$.

(c) $\dfrac{4}{x} + \frac{x-1}{5} < \dfrac{3}{x} + 1$.

(d) $\dfrac{(x-a)}{(x+1)(x-a)} > 0$. Indique cómo la solución depende de a.

(e) $\dfrac{4x-3}{6x} \leq \dfrac{8x-6}{5x}$.

(7) Determine los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq x\}$.

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x^8 + 2x^7 - 8x^6}{x^2 - 4x + 3} > 0\right\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 11x^2 + 10x < 10x^3 - 12x^2 + 82x\}$.

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{40}{x^2 + x - 12} < -4\right\}$.

(8) Resuelva las siguientes inecuaciones, indicando explícitamente cada conjunto solución:

(a) $|x-3| \leq \dfrac{1}{2}$.

(b) $2|x| < |x-1|$.

(c) $|x-8| < x-2$-

(d) $x - |x+1| > 2$.

(e) $\left|\dfrac{5x+3}{x-1}\right| \geq 7$.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella una hora antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. **(a)** (20 min.) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \ (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4.$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

(b) 1) (15 min.) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0, \quad x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x-1)^2(x+2)$.

2) (15 min.) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Hint: Utilice la parte anterior.

P2. **(a)** (30 min.) Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

- Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B.
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

(b) (30 min.) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}.$$

(c) (20 min.) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|.$$

(d) (20 min.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1.$$

(e) (20 min.) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$$

SEMANA 3:

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Acotamiento de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Como hablamos en el primer capítulo, los números reales poseen tres propiedades fundamentales que los caracterizan. Como ya sabemos, tanto los axiomas de cuerpo como los axiomas de orden no son únicos de $\mathbb{R}$, ya que, por ejemplo, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ también verifica estas propiedades. Resulta natural entonces preguntarse en qué se diferencian los números racionales y los números reales ¿son acaso iguales estos conjuntos? En este capítulo responderemos esta pregunta a través del último axioma restante de $\mathbb{R}$: **el axioma del supremo.**

3.1 Cota Superior e Inferior

Antes de presentar el axioma del supremo, debemos estudiar una serie de definiciones que sirven para acotar conjuntos: *cotas superiores e inferiores, máximos y mínimos, supremos e ínfimos.*

Definición (Acotado Superiormente) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **acotado superiormente** si existe un real M que es mayor o igual que todos los elementos del conjunto A, es decir,

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \text{ tal que } (\forall x \in A), x \leq M.$$

A este número M, se le llamará **cota superior** de A.

Por ejemplo, es fácil ver que $M = 1$ es una cota superior del conjunto $I = [0, 1]$. En efecto, todo elemento $x \in I$ debe cumplir por definición que $0 \leq x \leq 1$. Como $M = 1$, entonces tendremos que para todo $x \in I$, se tiene que $x \leq M$, por lo que M es cota superior de I. Notemos aquí que $M' = 2$ también es una cota superior de I ya que $x \leq M \leq M'$ para todo $x \in I$. Esta última observación es cierta en general.

Proposición 3.1. *Sea $M \in \mathbb{R}$ una cota superior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.*

(1) *Si $M' \in \mathbb{R}$ es tal que $M' \geq M$, entonces M' también es cota superior de A.*

(2) *Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $c > M$, entonces $c \notin A$.*

Demostración. Probemos primero **(1)**. Por definición de cota superior, tenemos que

$$x \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Como $M' \geq M$, entonces tendremos que

$$x \leq M \leq M', \quad \forall x \in A,$$

por lo que M' es una cota superior de A.

Ahora probemos **(2)**. Sea $c > M$ y supongamos por contradicción que $c \in A$. Como M es cota superior de A, se tiene que $x \leq M$ para todo $x \in A$.En particular, tomando $x = c$ tenemos que $c \leq M < c$, lo que es una contradicción.

Definición (Acotado Inferiormente) Un conjunto A es **acotado inferiormente** si existe un real m que es menor o igual que todos los elementos del conjunto A, es decir,

$$(\exists m \in \mathbb{R}) \text{ tal que } (\forall x \in A), m \leq x.$$

A este número m se le llamará **cota inferior** de A.

Igual que antes, tenemos la siguiente propiedad, cuya demostración se deja como ejercicio.

Proposición 3.2. *Sea $m \in \mathbb{R}$ una cota inferior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.*

(1) *Si $m' \in \mathbb{R}$ es tal que $m' \leq m$, entonces m' también es cota inferior de A.*

(2) *Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $c < m$, entonces $c \notin A$.*

Notemos que un conjunto acotado superiormente no tiene por qué ser acotado inferiormente. Por ejemplo, el intervalo $A = (-\infty, 1]$ es acotado superiormente por 1, pero no tiene cota inferior. En efecto, supongamos que A tiene alguna cota inferior $m \in \mathbb{R}$, es decir, se cumple que $m \leq x$ para todo $x \in A$. En particular, para $x = 1$, se tiene que $m \leq 1$ y por lo tanto $m \in A$. Como $m - 1 < m \leq 1$, entonces se tiene que $m - 1 \in A$ contradice que m es una cota inferior de A por la propiedad anterior. En general, el mismo fenómeno podría pasar con conjuntos que son acotados inferiormente pero no poseen cota superior. Para evitar esto, se introduce la siguiente definición.

Definición Un conjunto acotado superior e inferiormente, se dice **acotado**.

Proposición 3.3. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado si y solo si existe $M \geq 0$ tal que*

$$(\forall x \in A), |x| \leq M.$$

Demostración. Primero probaremos que si $(\forall x \in A), |x| \leq M$, entonces A es acotado. En efecto, por las propiedades del valor absoluto se tiene que para cualquier $x \in A$,

$$-M \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq M,$$

de donde es claro que A es acotado superior e inferiormente.

Ahora probaremos que si A es acotado entonces $|x| \leq M$ para algún $M \in \mathbb{R}$. En efecto,si A es acotado entonces es acotado superior e inferiormente, en particular, existen $c, C \in \mathbb{R}$ tal que

$$c \leq x \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos que $M = \max\{|c|, |C|\}$ es suficiente para concluir. Sea $x \in A$. Si $x \geq 0$, entonces $0 \leq x \leq C$ y así

$$|x| = x \leq C = |C| \leq M.$$

Por otro lado, si $x < 0$ entonces $c \leq x < 0$ y así

$$|x| = -x \leq -c = |c| \leq M.$$

Por lo tanto, $|x| \leq M$ para todo $x \in A$. La otra dirección se deja como ejercicio. $\square$

Ejemplos:

(1) $A = (-\infty, 5)$. Este intervalo es acotado superiormente, una cota superior es 5, y el conjunto de las cotas superiores es $[5, \infty)$.

No hay cotas superiores $m < 5$. En efecto, si $m < 5$ es cota superior, entonces podemos definir $\varepsilon = \dfrac{5-m}{2} > 0$ y ver que

$$m + \varepsilon = m + \frac{5-m}{2} < m + (5-m) = 5,$$

por lo que $m + \varepsilon \in A$ y $m < m + \varepsilon$, contradicción.

El intervalo no es acotado inferiormente pues dado un real $m < 5$, una cota inferior para m sería $m - 1$, pero $m - 1 \in A$.

(2) $A = [-1, 3]$. Este intervalo es acotado superior e inferiormente. El conjunto de las cotas superiores es el intervalo $[3, \infty)$. Y el de las cotas inferiores es el intervalo $(-\infty, -1]$.

(3) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$.

Veamos si $c = \dfrac{3}{2}$ es cota superior de A. Si $x > \dfrac{3}{2}$, entonces $x^2 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} > 2$.

Por lo tanto $x \notin A$. Esto quiere decir que ningún real mayor que $\dfrac{3}{2}$ puede estar en A.

Máximo y Mínimo

Definición (Máximo) Diremos que un conjunto A posee **máximo**, si posee una cota superior que pertenece al conjunto, es decir, si

$$(\exists M \in A) \text{ tal que } (\forall a \in A), a \leq M.$$

Definición (Mínimo) Diremos que un conjunto A posee **mínimo**, si posee una cota inferior que pertenece al conjunto, es decir,

$$(\exists m \in A) \text{ tal que } (\forall a \in A), m \leq a.$$

Observación:

- Estas dos definiciones nos dicen que el máximo de un conjunto es el mayor elemento del conjunto y que el mínimo de un conjunto es el menor elemento del conjunto.
- Si el máximo existe, este es único. Lo mismo ocurre con el mínimo.

Ejemplo 3.1.

(1) $A = (-\infty, 5)$. No posee máximo, ya que el conjunto de todas las cotas superiores es $[5, \infty)$ y $(-\infty, 5] \cap [5, \infty) = \emptyset$.

(2) $A = [-1, 3]$. Posee como mínimo a -1 y como máximo a 3.

Supremo e Ínfimo

Definición (Supremo) Diremos que un conjunto A posee **supremo** si existe un real s que satisface las siguientes condiciones:

(1) s es una cota superior de A.

(2) Para todo $M \in \mathbb{R}$ que es cota superior de A, se tiene que $s \leq M$.

Al real s, lo llamaremos **supremo** de A y se denotará por $\sup A$.

Observación: El supremo es la **menor de todas las cotas superiores**. Además, en caso de existir, el axioma de tricotomía implica que el supremo es único.

Definición (Ínfimo) Diremos que un conjunto A posee **ínfimo**, si existe un real u que satisface las siguientes condiciones:

(1) u es una cota inferior de A.

(2) Para todo $m \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A, se tiene que $m \leq u$.

Al real u, lo llamaremos **ínfimo** de A y se denotará por $\inf A$.

Observación: El ínfimo es la **mayor de todas las cotas inferiores**. Además, en caso de existir, el axioma de tricotomía implica que el ínfimo es único.

Ejemplo 3.2.

(1) $A = (-\infty, 5)$. Tiene como supremo el valor 5, ya que 5 es cota superior del conjunto y cualquier otra cota superior de A será mayor que 5. No tiene ínfimo pues no está acotado inferiormente.

(2) $A = [-1, 3]$. Está acotado superior e inferiormente y tiene a -1 como ínfimo y a 3 como supremo (-1 es mínimo y 3 es máximo).

Observación: Siempre se tendrá que si el mínimo m de un conjunto A existe entonces el ínfimo u de A también existe y son iguales. Esto es porque, el mínimo m es una cota inferior de A y por la definición de ínfimo tendremos que $m < u$.

Por otro lado, como m pertenece al conjunto, toda cota inferior debe ser menor que él, en particular el ínfimo u, es decir $u < m$. Por lo tanto $m = u$.

Lo mismo se tendrá para máximo y supremo.

Resumimos ahora las características anteriores en el caso de intervalos, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

	min	max	ínf	sup
$[a,b]$	a	b	a	b
(a,b)	$\nexists$	$\nexists$	a	b
$[a,b)$	a	$\nexists$	a	b
$(a,b]$	$\nexists$	b	a	b
$(-\infty,b]$	$\nexists$	b	$\nexists$	b
$(-\infty,b)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	b
(a,∞)	$\nexists$	$\nexists$	a	$\nexists$
$[a,\infty)$	a	$\nexists$	a	$\nexists$

Queda propuesto, como ejercicio, argumentar la tabla anterior.

3.2 Aproximación del supremo/ínfimo

Antes de ir con el axioma del supremo, mostraremos que si el supremo de un conjunto A existe, entonces es posible *aproximarlo* con cualquier precisión mediante elementos del conjunto. Este resultado es importante y será utilizado con frecuencia tanto en este curso como en los posteriores. Más tarde en el semestre, cuando veamos *sucesiones*, esto formalizará mejor a qué nos referimos con *aproximar*.

Proposición 3.4. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío que posee supremo y sea $s \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Se cumple que $s = \sup A$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que*

$$x \geq s - \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Como hay que probar una equivalencia, demostraremos cada implicancia por separado.

($\Rightarrow$) Supongamos por contradicción que la conclusión no es cierta, es decir, vamos a suponer que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\forall x \in A), \quad x \leq s - \varepsilon.$$

Esto último significa que $M = \sup A - \varepsilon$ es una cota superior de A, pero entonces $M < \sup A$. Esto contradice que $\sup A$ sea la menor de las cotas superiores.

($\Leftarrow$) Supongamos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A) \text{ tal que } x \geq s - \varepsilon. \tag{3.1}$$

Probaremos que $s = \sup A$ por contradicción, esto es, supongamos que $s \neq \sup A$ y veamos que esto nos lleva a una contradicción.

El hecho de que s sea cota superior de A pero no sea el supremo de A, quiere decir que *s no es la menor cota superior* de A. En otras palabras, existe s' tal que

$$s' \text{ es cota superior de } A \quad \text{y} \quad s' < s.$$

Definamos $\varepsilon = s - s' > 0$. Por (3.1), sabemos que existe $x \in A$ tal que

$$x \geq s - \varepsilon = s',$$

pero esto contradice que s' sea cota superior de A.

□

La proposición anterior no sólo nos permite *aproximar* el supremo de un conjunto, también nos da una forma de caracterizar el supremo que puede ser útil en demostraciones y en ejercicios. En efecto, si se tiene un candidato de supremo s, se puede usar (3.1) para probar que, efectivamente, s es el supremo.

Ejemplo 3.3.
Demuestre que

$$\sup\left\{\frac{x}{1+x} : x > 0\right\} = 1.$$

Veamos primero que 1 es cota superior. Para todo $x > 0$, se cumple que

$$\frac{x}{1+x} < 1,$$

ya que $x < 1 + x$. Por lo tanto, 1 es una cota superior de A.

Ahora que sabemos que 1 es cota superior de A, veamos que 1 satisface que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists a \in A)\ \text{ tal que } a > 1 - \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, buscamos un elemento $a \in A$ tal que $1 - \varepsilon < a \leq 1$. Esto equivale a encontrar $x > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{x}{1+x} &\iff (1-\varepsilon)(1+x) < x && \text{ya que } x + 1 > 0 \\ &\iff 1 - \varepsilon + (1-\varepsilon)x < x \\ &\iff 1 - \varepsilon < \varepsilon x \\ &\iff \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < x \end{aligned}$$

Tomando, por ejemplo,

$$x = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1,$$

se tiene $x > 0$. En particular, definiendo $a = \dfrac{x}{1+x}$, entontramos $a \in A$ tal que $1 - \varepsilon < a < 1$. Por Propsición 3.4, esto implica que $1 = \sup A$.

Análogamente, se puede probar el que el ínfimo puede aproximarse por elementos del conjunto. Su demostración es completamente análoga, por lo que se deja como ejercicio.

Proposición 3.5. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto que no vacío posee ínfimo* $\inf A$ *y sea $i \in \mathbb{R}$ cota inferior de A. Se cumple que $i = \inf A$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que*

$$x \leq i + \varepsilon.$$

3.3 Axioma del Supremo

Hemos visto que hay conjuntos acotados superiormente que no poseen máximo. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, 5)$, el candidato a ser máximo es 5 pero no pertenece al conjunto. Por otro lado, vimos que 5 es el supremo de $(-\infty, 5)$ ya que toda otra cota superior de $(-\infty, 5)$ debe ser mayor a 5.

En general, para que un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ tenga supremo, parece ser que lo único que necesitamos es que A sea acotado superiormente. En efecto, una vez que A tiene cota superior, la intuición dice que debería existir la **mejor** de todas las cotas superiores. Sin embargo, veremos más adelante que no es posible deducir la existencia del supremo a partir de los axiomas de cuerpo y orden, por lo cual es necesario agregarlo como un tercer axioma.

> **Axioma 8. (Axioma del Supremo)**
> Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente posee supremo.

Observación:

- Se puede demostrar que todo conjunto no vacío acotado inferiormente pose ínfimo. En efecto, basta verificar que $\text{ínf}(A) = -\sup(-A)$[6].
- No es cierta la propiedad si se cambia supremo por máximo. En efecto, $(-\infty, 5)$ no tiene máximo pero sí supremo.
- El axioma del supremo nos permite reescribir la Proposición 3.4 sin agregar como hipótesis que A tenga supremo. La existencia del supremo es consecuencia del hecho de que A esté acotado:

Proposición 3.6. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y sea $s \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Se cumple que $s = \sup A$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que*

$$x \geq s - \varepsilon.$$

3.4 Aplicaciones del Axioma de Supremo

En esta sección, veremos dos aplicaciones importantes del axioma del supremo. La primera aplicación consiste en probar que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado. La segunda aplicación será demostrar que $\mathbb{R}$ es *arquimediano* (ver Teorema 3.2). La tercera aplicación consiste en mostrar que números como $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{5}$ pueden alcanzarse como el supremo de ciertos subconjuntos de números reales. Esto nos permitirá mostrar que $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ y, además, que los axiomas de cuerpo y orden no son suficientes para demostrar la existencia del supremo.

[6] Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se define $-A = \{-a : a \in A\}$. Por ejemplo, si $A = [0, 1]$, entonces $-A = [-1, 0]$

Aplicación 1

Definición (Parte Entera) La **parte entera** de un real $x \geq 0$, que denotaremos por $[x]$, es el supremo del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$, es decir,

$$[x] = \sup \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

Notemos que la parte entera de $x \in \mathbb{R}_{>}$ está bien definida pues el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ es acotado superiormente por x y además $0 \in A$. Por lo tanto, el axioma del supremo asegura que A posee supremo y así $[x]$ está bien definido. A la parte entera de x también se le llama **cajón inferior** de x.

Ejemplo 3.4.
La parte entera del real $3,5123$ es: $[3,5123] = 3$.

Propiedad 3.1. *Para $x \geq 0$, $[x]$ es un número natural y satisface $[x] \leq x < [x] + 1$.*

Demostración. Primero mostraremos que $[x]$ es un número natural. Como $[x] = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$, el real $[x] - \dfrac{1}{2}$, no puede ser una cota superior de $A := \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ Por lo tanto, por la propiedad de aproximación del supremo (Proposición 3.4), debe existir un elemento $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[x] - \dfrac{1}{2} < n_0 \leq [x]$. Veamos que n_0 es una cota superior de A. Esto lo tendremos si todo natural n que sea mayor estricto que n_0, no pertenece a A (ver Proposición 3.1).

Si $n > n_0$, se deduce que $n \geq n_0 + 1$ y así $n \geq n_0 + 1 > ([x] - \frac{1}{2}) + 1 = [x] + \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, $n > [x]$, es decir, n es mayor que el supremo de A y así $n \notin A$ por Proposición 3.1. Con esto, concluimos que $n_0 \in \mathbb{N}$ es una cota superior de A. Como $n_0 \in A$, concluimos que es un máximo y por ende es igual a $[x]$, es decir, $[x] = n_0$ es un número natural.

Para la segunda parte, vemos que $[x] \in \mathbb{N}$ implica que $[x] + 1 \in \mathbb{N}$. Si $[x] + 1 \leq x$, entonces $[x] + 1 > [x]$ contradice que $[x]$ es el supremo de $\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. $\square$

Ahora podemos probar la primera aplicación importante del axioma del supremo.

Teorema 3.1. *Los números naturales no son acotados superiormente.*

Demostración. Argumentaremos por contradicción, es decir, asumimos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío, entonces por el axioma del supremo concluimos que $\mathbb{N}$ posee supremo, el cual llamaremos s. Para este supremo se tendría que $[s] \leq s < [s] + 1$, donde $[s] + 1 \in \mathbb{N}$. Lo cual contradice que s es cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

Aplicación 2

Como se comentó al comienzo de este curso, los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ son un cuerpo ordenado completo y arquimediano. Usando el axioma del supremo, ahora veremos que $\mathbb{R}$ es arquimediano.

Teorema 3.2 (Propiedad Arquimediana). *El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot x > 1$.*

Demostración. Lo haremos por contradicción. Si $\mathbb{R}$ no cumple esta propiedad, entonces existiría $x > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $nx \leq 1$. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 1/x$ y por lo tanto $1/x$ es una cota superior de $\mathbb{N}$, lo que es una contradicción. $\square$

El último teorema puede interpretarse como: sumar una cantidad suficientemente grande de veces x consigo mismo da origen a un real que es mayor que 1, sin importar qué tan pequeño sea x. Y además el valor de 1 puede cambiarse por cualquier real positivo.

Ejemplo 3.5.

$$\inf \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Si suponemos que esto no es cierto, es decir existe $m > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq \dfrac{1}{n}$.

Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mn_0 > 1$, lo cual equivale a $m > \frac{1}{n_0}$. Lo cual es una contradicción.

Teorema 3.3 ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe un racional $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demostración. Si x e y son racionales podemos escoger $r = \dfrac{x+y}{2}$.

Si alguno de ellos no es racional analizaremos dos situaciones:

- Primero, si $y - x \geq 1$ con y no racional, entonces podemos escoger $r = [y]$. Pues sabemos que $x \leq y - 1 < r = [y] < y$. Si y es racional, entonces podemos escoger $r = [x] + 1$, pues en este caso tenemos $x < [x] + 1 = r \leq x + 1 < y$.

- Segundo, si $y - x < 1$ con y no racional, podemos definir $r = \dfrac{n}{m}$, con $m = \left[\dfrac{1}{y-x} \right] + 1$ y $n = [my]$. Se demuestra que r satisface la propiedad estableciendo la siguientes relaciones:

  $my - mx > 1$ (se obtiene de $m > \frac{1}{y-x}$) ; $n + 1 > my$, entonces $my > n > mx$ (y no es racional).

□

Aplicación 3

La última aplicación que veremos es cómo ocupar el axioma del supremo como **constructor de números**. Para ello, utilizaremos los resultados anteriores para definir la raíz cuadrada de un número. Recordemos que $\sqrt{2}$ se define como el único número $s > 0$ tal que $s^2 = 2$. Consideremos nuevamente el conjunto

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R} : r^2 \leq 2 \right\}.$$

Claramente, A es acotado superiormente por $3/2$ y es no vacío, ya que $0 \in A$. Así, por el axioma del supremo, tenemos que A posee supremo, digamos $s = \sup A$. Demostraremos que no puede ocurrir que $s^2 < 2$, ni tampoco que $s^2 > 2$.

- **No puede ocurrir que $s^2 < 2$:**

  Probemos que si $s^2 < 2$, entonces $\exists \varepsilon \in (0, 1)$ tal que $(s + \varepsilon)^2 < 2$. En efecto

  $$\begin{aligned} (s+\varepsilon)^2 &= s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &\leq s^2 + (2s+1)\varepsilon \end{aligned}$$

  Si se escoge ε tal que

  $$s^2 + (2s+1)\varepsilon < 2$$

  se habrá probado la propiedad.

  Para ello, basta tomar $\varepsilon = \frac{2-s^2}{2(2s+1)}$. Luego $(s+\varepsilon)^2 < 2$, lo cual implica que $s+\varepsilon \in A$. Lo cual contradice que s es cota superior, ya que $s + \varepsilon > s$. Luego, no puede ser que $s^2 < 2$.

- **No puede ocurrir que $s^2 > 2$:**

  Se prueba que existe una cota superior de A menor que s, lo cual nos daría una contradicción pues s no sería la menor cota superior de a. Esto se puede hacer realizando un razonamiento similar al anterior llegando a que $(\exists \varepsilon \in (0,1))\ \ (s-\varepsilon)^2 > 2$, lo cual implica que $s - \varepsilon$ es una cota superior de A menor que s.

Finalmente, por el axioma de tricotomía, podemos concluir que $s^2 = 2$. Por lo tanto, tenemos derecho a definir $\sqrt{2}$ de la siguiente forma:

Definición (Raíz cuadrada de 2)

$$\sqrt{2} = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : r^2 \leq 2 \right\}.$$

Con esto, veremos que el axioma del supremo es lo que diferencia los números reales de los números racionales.

Proposición 3.7. *$\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, es decir, supongamos que podemos escribir $\sqrt{2}$ de la forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ y la fracción es irreducible (p y q no tienen divisores comunes distintos de 1). Notemos primero que necesariamente p o q es impar, si no 2 dividiría a ambos.

Luego, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ equivale a $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ (por la definición de raíz cuadrada), y así $p^2 = 2q^2$. Esto último implica que p^2 es par y, por lo tanto, p es par.

Como p es par, lo podemos escribir de la forma $p = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$. Luego, $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ implica $q^2 = 2k^2$ y, entonces, q es par. Pero esto es una contradicción, ya que vimos que q no puede ser par. Entonces, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

La Proposición 3.7 muestra que hay números reales que no son racionales, todo gracias al axioma del supremo. Los números reales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ se llamarán **números irracionales** y los denotaremos por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ahora veremos que el mismo razonamiento detrás de la construcción de $\sqrt{2}$ se puede utilizar para probar que el axioma del supremo no se puede concluir a partir de los axiomas de cuerpo y orden. En efecto, recordemos que $\mathbb{R}$ no es el único conjunto que satisface los axiomas de orden y cuerpo, ya que los números racionales $\mathbb{Q}$ con la suma y multiplicación usual también los cumplen. Por lo tanto, si los axiomas de cuerpo y orden implicaran la existencia del supremo de conjuntos acotados, entonces esto también pasaría en $\mathbb{Q}$, y así podríamos definir $\sqrt{2}$ de la misma forma que antes, pero tomando supremo en $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{R}$. Es decir, $\sqrt{2} = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 \leq 2\}$ sería un número racional, lo que contradice la Proposición 3.7 (para ser completamente formales, habría que utilizar la densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$ para justificar que la definición en $\mathbb{Q}$ coincide con $\sqrt{2}$).

3.5 Material extra

Notemos que la definición de $\sqrt{2}$ mediante supremos puede generalizarse a cualquier número real positivo, como sigue.

Definición (Raíz cuadrada de un número real positivo)

$$\sqrt{x} = \sup\left\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq x\right\}.$$

De hecho, esto se puede hacer de manera más general para la raíz n-ésima de cualquier número positivo. En efecto, recordemos que un número $r \geq 0$ se dice la raíz n-ésima de

$x \geq 0$ si $r^n = x$. Entonces, el mismo análisis hecho para la raíz cuadrática nos permite definir la raíz n-ésima a partir de supremos, como sigue:

DEFINICIÓN (RAÍZ n-ÉSIMA DE UN NÚMERO REAL POSITIVO)

$$\sqrt[n]{x} = \sup \{r \geq 0 : r^n \leq x\}.$$

En general, se puede probar que la raíz n-ésima de un número es racional siempre y cuando es una potencia *perfecta*. De hecho, la misma demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ puede adaptarse para probar la irracionalidad de las otras raíces.

En general, los números racionales son solo una parte minúscula de $\mathbb{R}$ y, de hecho, *casi todos* los números reales son irracionales. No veremos esto de manera formal en este curso; sin embargo, uno puede convencerse de que hay muchos irracionales de manera muy sencilla. Sabiendo que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cada número de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $b \neq 0$ es también irracional, lo que muestra que hay al menos tantos números irracionales como racionales (esto se verá formalmente en el curso de Introducción al Álgebra).

La siguiente propiedad nos muestra cómo se comporta la suma y multiplicación en los irracionales.

Propiedad 3.2.

(1) $x, y \in \mathbb{Q} \implies x \pm y \in \mathbb{Q}$.

(2) $x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(3) $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Finalmente, mostraremos que los números irracionales son densos en $\mathbb{Q}$, lo que informalmente significa que entre cualquier par de números racionales $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$ podemos encontrar un irracional que está entre p y q.

Proposición 3.8 ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}$).

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x < y,\ \exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < i < y.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos, por Proposición 3.3 que

$$\exists p,\ q \in \mathbb{Q},\ x < q < p < y.$$

Con esto definimos:

$$i = q + \frac{\sqrt{3}}{2}(p - q),$$

que por la propiedad anterior pertenece a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ El máximo del conjunto $\{0, 1\}$ es 1.

2. $\square$ El mínimo del conjunto $\{0, 1\}$ es 1.

3. $\square$ Para todo par de reales a y b, con $a < b$, el máximo del conjunto $[a, b)$ es b.

4. $\square$ Para todo par de reales a y b, con $a < b$, el supremo del conjunto $[a, b)$ es b.

5. $\square$ Para todo par de reales a y b, con $a < b$, el mínimo del conjunto (a, b) es a.

6. $\square$ Para todo real a, el ínfimo del conjunto $[a, \infty)$ es a.

7. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo

8. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee máximo.

9. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee ínfimo.

10. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee mínimo.

11. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado posee supremo.

12. $\square$ Todo conjunto no vacío y acotado posee máximo.

13. $\square$ Todo conjunto posee supremo.

14. $\square$ 1 es el supremo de $(1, \infty)$

15. $\square$ -1 es el máximo de $(-2, -1)$.

16. $\square$ Los números naturales son acotados inferiormente.

17. $\square$ Para cualquier par de reales $x < y$ existe un entero q tal que $x < q < y$.

18. $\square$ Para cualquier par de reales $x < y$ existe un racional q tal que $x < q < y$.

19. $\square$ Para cualquier par de reales $x < y$ existe un irracional q tal que $x < q < y$.

20. $\square$ Para cualquier par de reales $x < y$ existe un real q tal que $x < q < y$.

21. $\square$ Si un conjunto $A \neq \emptyset$ es acotado superiormente entonces satisface que para todo $M \in \mathbb{R}$ existe un $x \in A$ con $M < x$.

22. $\square$ Si un conjunto $A \neq \emptyset$ no tiene supremo entonces no es acotado superiormente.

23. $\square$ Para cada $s > 0$ que satisface $s^2 < 2$ existe $a > 0$ tal que $(s + a)^2 < 2$.

24. $\square$ Para cada $s > 0$ que satisface $s^2 > 2$ y cada $a > 0$ se cumple $(s-a)^2 > 2$.

25. $\square$ Para cada $s > 0$ que satisface $s^2 < 2$ y cada $a > 0$ se cumple $(s+a)^2 > 2$.

26. $\square$ Para cada $s > 0$ que satisface $s^2 > 2$ existe $a > 0$ tal que $(s-a)^2 > 2$.

27. $\square$ Para cada $s > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $sn > 1$.

28. $\square$ Para cada $s > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $sn > 1$.

29. $\square$ Para cada $s > 0$ existe $n \in \mathbb{N}, n > 0$ tal que $sn < 1$.

30. $\square$ Para cada $s > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $sn < 1$.

31. $\square$ El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ no es acotado superiormente.

32. $\square$ El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ tiene máximo.

33. $\square$ El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ es acotado inferiormente.

34. $\square$ El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ tiene mínimo.

35. $\square$ La suma de dos números racionales siempre es un número racional.

Guía de Ejercicios

1. Demuestre que $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

2. Demuestre que $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos determine su acotamiento, la existencia de ínfimos y supremos y la existencia de mínimos y máximos.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x| < 4\}$.

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R} : [x] < 2\}$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

(e) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{Z} : 2^x > 2\}$.

(g) $A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(h) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq x + 1\}$.

(i) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(j) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

(k) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \in \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right]\right\}$.

(l) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \cdot n > 1\}$.

4. Demuestre que $[0, 1)$ no tiene máximo.

5. Sea A subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Sea a una cota superior de A y $c \geq 0$. Pruebe que ca es una cota superior del conjunto $\{cx : x \in A\}$ (que se denota cA). Calcule $\sup(cA)$ en términos de $\sup(A)$ y de c.

6. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}_+$. Sea a una cota inferior de A y b una cota inferior de B. Demuestre que $a + b$ es una cota inferior del conjunto $\{x + y : x \in A, y \in B\}$, denotado por $A + B$. Calcule $\inf(A + B)$ en términos de $\inf(A)$ y de $\inf(B)$.

7. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Demuestre que si a es una cota superior del conjunto A y b es una cota superior del conjunto B entonces $\max\{a, b\}$ es una cota superior de $A \cup B$ y $\min\{a, b\}$ es una cota superior de $A \cap B$. Calcule $\sup(A \cup B)$ y $\sup(A \cap B)$, en términos de $\sup(A)$ y $\sup(B)$.

8. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. (10 min.) Pruebe que $\inf\left\{\frac{1}{2n+1} : \; n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

P2. (30 min.) Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$. Demuestre que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee máximo.

P3. (30 min.) Dados a y b reales, demuestre que si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \epsilon$ entonces $a \leq b$. Para argumentar, estudie el conjunto $\{\epsilon > 0 : \epsilon \geq a - b\}$.

P4. (30 min.) Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

P5. (30 min.) Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades:

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$.

(b) Todo elemento de A es menor que todo elemento de B

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

P6. (30 min.) Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$ entonces $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C)$.

P7. (30 min.) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\inf(A^c) = \sup(A)$ si y sólo si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

SEMANA 4:

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Geometría Analítica

4.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Motivación y ecuaciones elementales

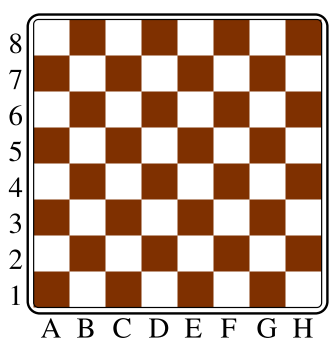
¿Ha oído hablar sobre gente que juega ajedrez sin tener que mirar nunca el tablero? Esto es posible, y se debe a la herramienta llamada coordenadas de un punto.

En un tablero de ajedrez, se usan las letras de la A a la H para identificar las columnas del tablero y los números del 1 al 8 para identificar sus filas.

Observe la figura de abajo, allí aparece el típico tablero de ajedrez, con sus columnas y filas rotuladas según la regla enunciada anteriormente.

Así, por ejemplo, la torre blanca comienza ubicándose en la coordenada $(1, A)$ del tablero.

Con esta técnica, los jugadores pueden anotar sus jugadas, en los partidos, o simplemente comunicarle a su adversario las coordenadas de la pieza que piensa mover, y este sabe exactamente cual será la nueva configuración del tablero



Esta idea puede usarse en otras situaciones, como, por ejemplo, un clásico juego de batallas navales donde los jugadores intentan destruir el barco adversario dando coordenadas a su bombardeos.

Un ejemplo muy importante es el Plano Geométrico.

En este caso, la idea para ubicar un punto cualquiera es trazar arbitrariamente dos rectas perpendiculares, que se cortan un punto llamado origen O.

Normalmente una de las rectas es horizontal y se denota por OX y la otra es vertical y se denota por OY.

Con esta construcción, un punto P se ubica en el plano midiendo su distancia a cada una de las rectas.

Para diferenciar los diferentes lados, a estas distancias se le asignan signos positivo o negativo, del modo siguiente:

- La distancia de P a la recta OY se denota por la letra x.

  $x > 0$ si P está a la derecha de OY, si no x será negativo al otro lado.

- La distancia de P a la recta OX se denota por la letra y.

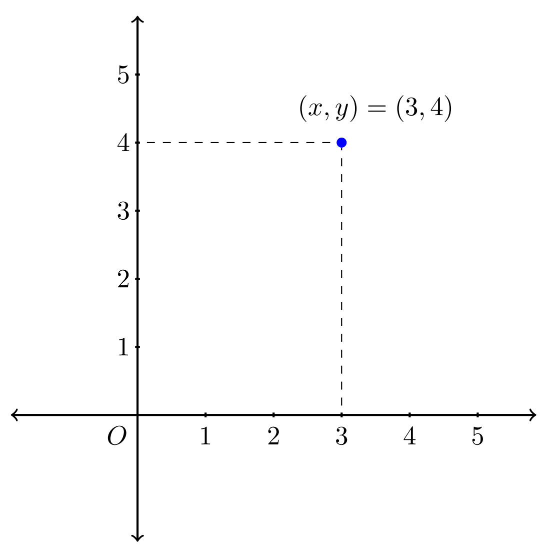
  $y > 0$ si P esta arriba de la recta OX, abajo se usa $y < 0$.

Este conjunto de rectas y la forma en que se ubican los puntos en base a ellas, constituyen el famoso *Sistema de Coordenadas Cartesianas*.

Se suele denotar este sistema por el símbolo $\{OXY\}$ para recordar sus elementos gestores.

Observemos a la derecha cómo se ha dibujado el punto P que dista $x = 3$ del eje OY y dista $y = 4$ del eje horizontal OX.

Los números 3 y 4 se llaman las coordenadas del punto P. Esto se anota $P = (3, 4)$.



Un poco más de notación:

La recta horizontal OX se suele llamar eje de las x o *eje de las abscisas*. La recta vertical OY se llama o eje de las y o *eje de las ordenadas*.

Si $P = (x, y)$, entonces se dice que x es la abscisa de P y que y es la ordenada de P.

Conjuntos destacados:

El Sistema de Coordenadas Cartesianas también sirve para representar conjuntos de puntos. En general, estos conjuntos se anotan por expresiones del tipo

$$A = \{\text{todos los puntos de coordenadas } (x, y) \text{ tales que pertenecen a } C\},$$

donde la letra C denota alguna condición que satisfacen dichas coordenadas.

> **Ejemplo 4.1.**
> Por ejemplo, los ejes de coordenadas se pueden escribir como
>
> $$\begin{aligned} OX &= \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y = 0\}. \\ OY &= \{(x, y) : x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Los siguientes conjuntos se llaman Cuadrantes del Sistema de Coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{1er. Cuadrante} &= \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}, \\ \text{2do. Cuadrante} &= \{(x, y) : x < 0,\ y > 0\}, \\ \text{3er. Cuadrante} &= \{(x, y) : x < 0,\ y < 0\}, \\ \text{4to. Cuadrante} &= \{(x, y) : x > 0,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

Otras ecuaciones elementales

Veamos algunos conjuntos elementales del plano descritos usando ecuaciones algebraicas.

- $\{(x, y) : xy = 0\} = \{(x, y) : x = 0 \vee y = 0\}$ corresponde a la unión de dos ejes.
- $\{(x, y) : y > 0\}$ corresponde al semiplano de los puntos ubicados sobre el eje OX.
- $\{(x, y) : x = a\}$ donde a fijo, corresponde a una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$.
- $\{(x, y) : y = b\}$ donde b fijo, corresponde a una recta horizontal que pasa por el punto $(0, b)$.

Lugares Geométricos

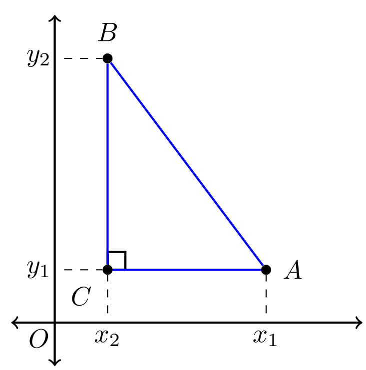
DEFINICIÓN (LUGAR GEOMÉTRICO) En este contexto, a los conjuntos de puntos del plano que satisfacen alguna condición geométrica o algebraica, los llamaremos **lugares geométricos**.

Observación: En geometría se han estudiado muchos lugares geométricos importantes, tales como las rectas, circunferencias, etc., dándose sus características mediante el lenguaje de la geometría.

Nuestro objetivo será estudiar dichos lugares geométricos, escribiendo sus definiciones mediante ecuaciones algebraicas que los identifiquen plenamente. Normalmente, en nuestros problemas tendremos que encontrar dichas ecuaciones e identificar el concepto geométrico que ellas representan.

4.2 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos del plano $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Sea C el punto de coordenadas (x_2, y_1), entonces el triángulo ΔACB es rectángulo en C, como en la figura:



De la figura, vemos claro que la distancia entre A y C, y la distancia entre C y B están dadas por

$$\begin{aligned} d(A, C) &= |x_2 - x_1|, \\ d(C, B) &= |y_2 - y_1|. \end{aligned} \tag{4.1}$$

¿Cómo podríamos calcular la distancia entre A y B?
Usando que el triángulo ΔACB es rectángulo en C, por el teorema de Pitágoras[7], se cumple que:

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(C, B)^2. \tag{4.2}$$

Reemplazando (4.1) y sacando raíz cuadrada, la distancia $d(A, B)$ se puede definir de la siguiente manera:

Definición (Distancia entre dos puntos) Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, se define la **distancia entre A y B** como:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4.3}$$

[7] En el Material Extra podrá encontrar un recuerdo del teorema de Pitágoras, junto con una demostración gráfica del mismo.

Antes de continuar: Notemos que para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a = b \quad \Longrightarrow \quad a^2 = b^2.$$

Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta.
Pregunta: ¿Por qué, entonces, pudimos pasar de (4.2) a (4.3)?
Es cierto que (4.2) implica (4.3), ya que las distancias son *siempre positivas*. En este caso, se puede tomar la raíz cuadrada y la igualdad se mantiene. En efecto,

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ se cumple que:} \quad a = b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = b^2.$$

La demostración de esta propiedad queda como ejercicio.

4.3 Circunferencia

Ecuación de la circunferencia

Sean $A = (a, b)$ un punto fijo conocido del plano y r un número real conocido mayor que 0. Una *circunferencia con centro en el punto A y radio r*, es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano tales que su distancia al punto A vale r, es decir:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : d(P, A) = r\}.$$

Usando la definición de distancia dada por la ecuación (4.3), obtenemos:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}.$$

Luego, elevando al cuadrado:

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

Por lo tanto, la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (a, b) y de radio r será:

Definición (Ecuación de la circunferencia)

$$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{4.4}$$

Es decir, al dibujar en el plano los puntos que satisfacen esta ecuación, se formará una circunferencia.

Ejemplo 4.2.

- $\mathcal{C}: x^2+y^2=8^2$, es decir :$(x-0)^2+(y-0)^2=64$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen $(0,0)$ y de radio 8.
- $\mathcal{C}: x^2+y^2-2x=0$. De esta fórmula, no nos queda claro si es una circunferencia o no. Para poder ver que efectivamente este último ejemplo se trata de una circunferencia, es necesario detenernos para aprender el método de *completación de cuadrados perfectos.*

Completación de cuadrados perfectos

Volvamos al ejemplo anterior:

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x=0.$$

Podemos operar la ecuación hasta encontrar una expresión equivalente:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x=0 &\iff x^2-2x+y^2=0, \\ &\iff (x^2-2x+1)-1+y^2=0, \\ &\iff (x-1)^2+y^2=1. \end{aligned}$$

Es decir, corresponde a una circunferencia con centro en $(1,0)$ y de radio $r=1$.

Ecuación general de la circunferencia

El ejemplo anterior nos muestra que las circunferencias no siempre se encuentran escritas como las definimos en (4.4).

Si $\mathcal{C}$ es una circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ entonces su ecuación puede escribirse

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 &\iff x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2, \\ &\iff x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \end{aligned}$$

Es decir, si definimos: $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$, la ecuación de la circunferencia también se escribirá de la forma:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

Recíprocamente, utilizaremos el método de completación de cuadrados. Consideremos el conjunto $M=\{(x,y): x^2+y^2+Ax+By+C=0\}$, donde A,B,C son constantes dadas. La ecuación del conjunto M puede escribirse:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+Ax+By+C=0 &\iff x^2+2\left(\frac{A}{2}\right)x+y^2+2\left(\frac{B}{2}\right)y+C=0,\\
&\iff x^2+2\left(\frac{A}{2}\right)x+\left(\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+\\
&\qquad +y^2+2\left(\frac{B}{2}\right)y+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2+C=0,\\
&\iff \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}+C=0,\\
&\iff \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.
\end{aligned}$$

De donde vemos que M corresponde a una circunferencia de centro $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ cuando $A^2+B^2-4C\geq 0$.

Si, por el contrario, los datos A, B y C fueran tales que $A^2+B^2-4C<0$, entonces observamos que no existirían valores de x e y que satisfagan la ecuación de M. Luego, M corresponde al conjunto vacío, ya que no podemos crear una circunferencia de radio negativo.

Definición (Ecuación general de la circunferencia) Sean $A,B,C\in\mathbb{R}$ tal que $A^2+B^2-4C\geq 0$. Se escribe la **ecuación general de la circunferencia** como

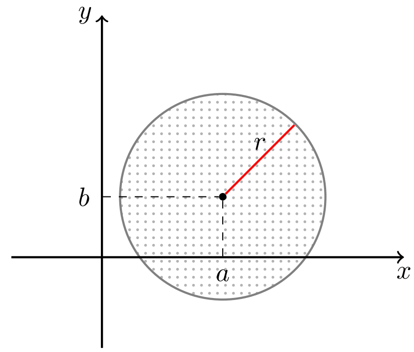
$$\mathcal{C}\ :\ x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

$\mathcal{C}$ corresponde a una circunferencia de centro $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$.

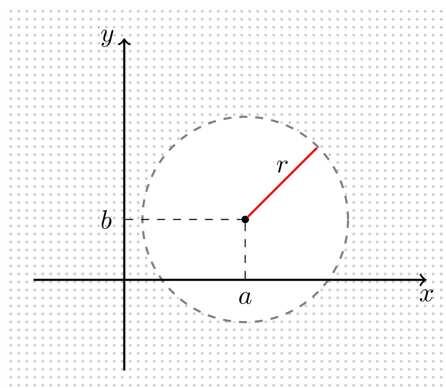
Ejemplo 4.3.
$\mathcal{C}\ :\ 2x^2+3x+2y^2+5y=0$ corresponde a una circunferencia de centro $\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{4}\right)$ y radio $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}$. Para comprobarlo, basta con dividir la expresión por 2, obteniendo así: $\mathcal{C}\ :\ x^2+\frac{3}{2}x+y^2+\frac{5}{2}y=0$.

Observación: De la misma forma en la que dedujimos la ecuación de la circunferencia, se podría encontrar la ecuación de la circunferencia "rellena". ¿Cómo se caracterizaría esa región del plano? ¿Y si, por el contrario, quisiéramos representar la *zona exterior* a la circunferencia?

- $\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ Representa a la zona interior a la circunferencia de centro en (a,b) y radio r.



- $\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2\}$ representa a la zona exterior a la circunferencia de centro en (a,b) y radio r.



4.4 Recta

Ecuación de la recta

Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano tales que $A \neq B$. Queremos encontrar la ecuación de la única recta que pasa por los puntos A y B.

En los casos $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, que corresponden a rectas vertical y horizontal respectivamente, la ecuación es, evidentemente, $x = x_1$ o $y = y_1$, respectivamente.

En el caso $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, podemos ver que un punto cualquiera $P = (x,y)$ del plano pertenece a la recta que pasa por A y B sí y solamente sí alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(1) $P = A$,

(2) $P = B$,

(3) P está en el segmento $\overline{AB}$,

(4) B está en el segmento $\overline{AP}$,

(5) A está en el segmento $\overline{PB}$.

Supongamos que estamos en el caso (3). Sean $C = (x, y_1)$ y D=(x_2, y_1). Gráficamente, la situación se puede ver en la figura 1.

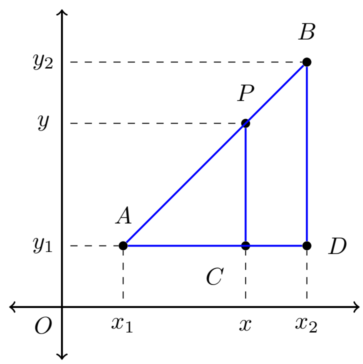


Figura 1: Ejemplo de la recta que pasa por A y B, caso P en el segmento $\overline{AB}$.

De la figura, podemos ver que los triángulos ΔACP y ΔADB son semejantes. Esto implica que sus catetos son proporcionales, condición de semejanza que escribimos de la siguiente manera:

$$\frac{|\overline{CP}|}{|\overline{DB}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|},$$
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Queda como ejercicio ver que las condiciones **(4)** y **(5)** son equivalentes a la misma ecuación.

Con esto podemos ver que la condición necesaria y suficiente para que un punto $P = (x, y)$ esté sobre la recta L que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es

$$P = (x, y) \in \mathcal{L} \iff (x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1). \tag{4.5}$$

Ecuación de la recta dados dos puntos

Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación de $\mathcal{L}$ es $\mathcal{L} : x = x_1$ o bien $\mathcal{L} : x = x_2$

Si $x_1 \neq x_2$ entonces lo más cómodo es utilizar la fórmula deducida anteriormente (4.5). Es decir:

Definición (Ecuación de la recta dados dos puntos)

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.4.
Dados los puntos $A = (-2, 3)$ y $B = (5, 0)$, la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por A y B es:

$$(y - 3)(5 + 2) = (x + 2)(0 - 3).$$

Esto es,

$$\mathcal{L} \ : \ (y - 3) = -\frac{3}{7}(x + 2)$$

Sin embargo, simplificando la primera ecuación también se escribe:

$$\mathcal{L} : \ 3x + 7y - 15 = 0.$$

De la ecuación de la recta dados dos puntos (4.6), hay una cantidad que vale la pena destacar, que es la *pendiente de la recta*:

Definición (Pendiente de una recta) Sea $\mathcal{L}$ una recta no vertical. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de $\mathcal{L}$, entonces al real

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

se le llama **pendiente de la recta $\mathcal{L}$**.

Observación: La pendiente es independiente de los dos puntos que se escojan sobre la recta. Esto se puede ver que es cierto en los triángulos semejantes de la figura:

Como los triángulos que se generan son semejantes, sus catetos son proporcionales, esto es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

Esto siempre es cierto, independientemente de los puntos A, A', B, B' que se escojan sobre la recta.

Observación: Casos especiales: rectas verticales y horizontales.

- Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y. Recíprocamente, si $m = 0$, quiere decir que para cualquier par de puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ sobre la recta L, se cumple que $y_1 = y_2$. En otras palabras, la recta es *horizontal*.

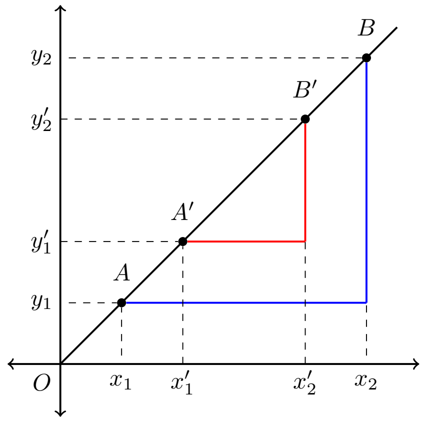


Figura 2: Ejemplo de la recta que pasa por A y B, caso P en el segmento $\overline{AB}$.

- Por otro lado, una recta vertical no tiene pendiente (si intentáramos escribir su pendiente, tendríamos que dividir por 0, lo cual ya sabemos que no es posible), pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

Ejemplo 4.5.
Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (8, 5)$.

De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{1-5}{2-8} = \frac{5-1}{8-2} = \frac{2}{3}.$$

Ecuación de la recta punto-pendiente

Volviendo a la ecuación de la recta (4.6), ahora que conocemos la definición de pendiente, podríamos reescribir:

$$\mathcal{L} \; : \; y - y_1 = m\,(x - x_1)\,.$$

Vemos, entonces, que si ya conocemos la pendiente de la recta, no necesitamos dos puntos que pasen por ella para poder encontrar su fórmula; con un punto y la pendiente, es suficiente:

Definición (Ecuación de la recta, punto pendiente) La ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por un punto $P = (x_0, y_0)$, se escribe:

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0).$$

Ejemplo 4.6.
Volviendo al Ejemplo 4.5, como ya sabemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$, sabiendo que pasa por $P = (2, 1)$, podemos escribir la ecuación de la recta:

$$\mathcal{L} \; : \; y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \,. \tag{4.7}$$

Operando, llegamos a la expresión equivalente:

$$L \; : \; y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}. \tag{4.8}$$

Por otro lado, si en vez de conocer que la recta pasa por el punto P, hubiéramos tenido como información la pendiente $m = \frac{2}{3}$ y que pasa por el punto $Q = (8, 5)$, entonces podríamos escribir

$$\mathcal{L} \; : \; y - 5 = \frac{2}{3}(x - 8) \,. \tag{4.9}$$

Después de operar, llegamos a (4.8). Por lo tanto, vemos que las expresiones (4.7) y (4.9) son equivalentes.

Ecuación principal de la recta.

Sea $\mathcal{L}$ una recta con pendiente m que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$. Del ejemplo anterior, podemos deducir la siguiente expresión equivalente de para la recta $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \; : \; (y - y_0) = m(x - x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L} \; : \; y = mx + (y_0 - mx_0).$$

Llamando $n = y_0 - mx_0$, obtenemos la *ecuación principal de la recta*:

Definición (Ecuación principal de la recta)

$$\mathcal{L} : y = mx + n.$$

Observación: Es claro que el punto $(0, n)$ satisface la ecuación de la recta, luego el significado geométrico de la constante n corresponde a la altura donde la recta corta al eje OY.

Ecuación general de la recta.

Como vimos en el Ejemplo 4.4 y en el Ejemplo 4.6, la ecuación de cualquier recta puede escribirse de la forma:

$$ax + by + c = 0.$$

En efecto, vemos que si $\mathcal{L}$ es una recta que pasa por lo puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_y), de la fórmula (4.5) sabemos que la recta $\mathcal{L}$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} \;:\; (y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (x - x_1)y_2 - (x - x_1)y_1,\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; yx_2 - yx_1 - x_2y_1 + x_1y_1 = xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1,\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.
\end{aligned}$$

Tomando $a = (y_2 - y_1)$, $b = (x_2 - x_1)$, $c = (x_2y_1 - x_1y_2)$, obtenemos la siguiente fórmula:

Definición (Ecuación general de la recta)

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0.$$

Ya vimos que la ecuación de la recta dados dos puntos y la ecuación general de la recta son equivalente. Pero, ¿qué pasa con las otras ecuaciones de la recta? Veamos las equivalencias:

- La **ecuación de la recta punto-pendiente**:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} \;:\; ax + by + c = 0, && \text{asumiendo } b \neq 0,\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; \frac{a}{b}x + y - \frac{c}{b} = 0, &&\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; -mx + y - \frac{c}{b} = 0 && \text{tomando } m = -\frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

  Ahora, supongamos que conocemos un punto $P = (x_0, y_0)$ de la recta. Entonces, este punto satisface la ecuación, es decir, $y_0 - mx_0 + \frac{c}{b} = 0$, de donde despejamos $\frac{c}{b} = mx_0 - y_0$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\mathcal{L} \;:\; y - mx - y_0 + mx_0 \quad \iff \quad \mathcal{L} \;:\; (y - y_0) = m(x - x_0).$$

- La **ecuación principal de la recta**:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} \;:\; ax + by + c = 0, && \text{asumiendo } b \neq 0,\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; -mx + y - \frac{c}{b} = 0, && \text{tomando } m = -\frac{a}{b},\\
\iff\; &\mathcal{L} \;:\; y = mx + n, && \text{tomando } n = -\frac{c}{b}.
\end{aligned}$$

Vimos, entonces, que todas las fórmulas para escribir rectas son equivalentes. En la práctica, dependiendo de los datos que uno tenga, se elige la ecuación que más se adapte a las necesidades de uno. Sin embargo, lo que resta por verificar es que estas fórmulas tengan solución. Sabemos que son conjuntos, pero podría pasar que fueran *conjuntos vacíos*.

Analicemos cuáles son los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación general de la recta

$$\mathcal{L} \ : \ ax + by + c = 0,$$

para distintos valores de a, b, c. Es decir, cual es el conjunto solución de esta ecuación.

Teorema 4.1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. El conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ es:*

(1) *El conjunto vacío si $a = 0, b = 0, c \neq 0$.*

(2) *Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.*

(3) *Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.*

(4) *Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.*

(5) *Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.*

Demostración.

(1) No hay punto (x, y) que cumpla la ecuación. Por lo tanto, el conjunto solución es vacío.

(2) Cualquier punto (x, y) satisface la ecuación. Esto implica que la solución es todo el plano cartesiano.

(3) Como $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces la ecuación queda $x = -c/a$, la cual corresponde a una recta vertical.

(4) Como $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces la ecuación queda $y = -c/b$, la cual corresponde a una recta horizontal.

(5) En este caso, dividiremos la demostración en dos etapas:

Etapa 1.

Primero, probaremos que el conjunto $R = \{(x, y) : ax+by+c = 0\}$ contiene al menos dos puntos distintos. En efecto, si $c \neq 0$, entonces $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ son dos puntos de R. Por otro lado, si $c = 0$ entonces $A' = (0, 0)$ y $B' = (-b, a)$ son dos puntos de R. Luego, no importando el valor de c, se tiene que R contiene al menos dos puntos distintos entre sí.

Etapa 2.

Como demostramos que R posee al menos dos puntos distintos entre sí, llamemos a estos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Sea $P = (x, y)$ un punto arbitrario de R.

Probaremos que P satisface la ecuación $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

En efecto, como (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x, y) son puntos de R, entonces los tres puntos satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0, & (1)\\ ax_2 + by_2 + c &= 0, & (2)\\ ax + by + c &= 0. & (3) \end{aligned}$$

Restando $(2) - (1)$ y $(3) - (1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= 0, & (2) - (1) = (4)\\ a(x - x_1) + b(y - y_1) &= 0. & (3) - (1) = (5) \end{aligned}$$

Haciendo $(y - y_1) \cdot (4) - (y_2 - y_1) \cdot (5)$, se concluye que

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Con esto hemos probado que R es una recta.

De la Etapa 1 vimos que si $c \neq 0$ entonces los puntos $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ pertenecen a R y son puntos de abscisas y ordenadas distintas. Por lo tanto, la recta R que pasa por esos puntos es oblicua. Lo mismo pasa para los puntos encontrados con $c = 0$.

□

Observación: Hemos demostrado que la ecuación $ax + by + c = 0$ representa siempre una recta, teniéndose los siguientes casos.

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es horizontal.
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$ entonces la recta es vertical.
- Finalmente, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es inclinada.

Paralelismo y perpendicularidad

Definición (Rectas paralelas) Diremos que dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si al intersecarse con una tercera recta (una transversal) en el mismo plano, los ángulos correspondientes de intersección con la transversal son congruentes.

Teorema 4.2. *Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.*

Demostración. Demostraremos cada implicancia por separado.

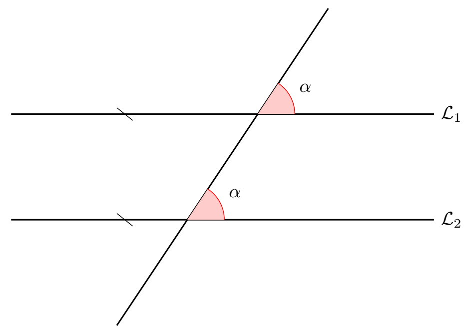
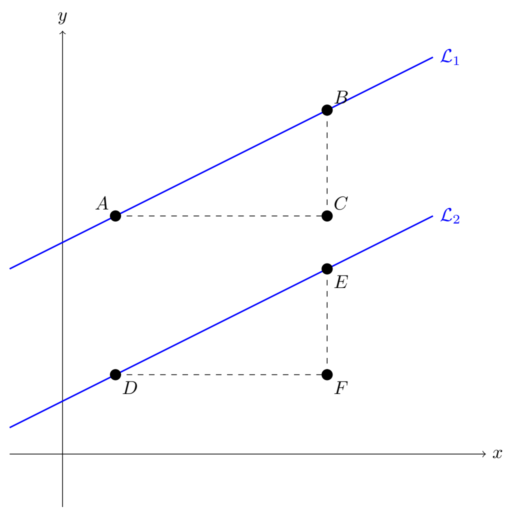


Figura 3: Ejemplo de dos rectas paralelas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}:2$.



$\Rightarrow$ Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas paralelas. Entonces, los triángulos ΔABC y ΔCDE son semejantes. Por lo tanto, si m_1 es la pendiente de $\mathcal{L}_1$ y m_2 es la pendiente de $\mathcal{L}_2$,

$$m_1 = \frac{d(A,C)}{d(B,C)} = \frac{d(D,F)}{d(E,F)} = m_2$$

$\Leftarrow$ Recíprocamente, si las pendientes de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son iguales, eso implica que los triángulos ΔABC y ΔCDE son semejantes y las rectas son paralelas.

$\square$

Ejemplo 4.7.
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4,3)$ que es paralela a la recta $\mathcal{L}: 4x+6y+5=0$.
Solución: Para conocer la pendiente de la recta, reescribamos la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} 4x+6y+5 &= 0 \\ 6y &= -4x-5 \\ y &= -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta $\mathcal{L}$ es $-\dfrac{2}{3}$. Entonces, buscamos una recta cuya pendiente también sea $-\dfrac{2}{3}$ pero que pase por el punto $(4,3)$. Usando la ecuación de la recta punto-pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y-3 &= -\frac{2}{3}(x-4) \\ 3y-9 &= -2x+8 \\ 3y+2x-17 &= 0. \end{aligned}$$

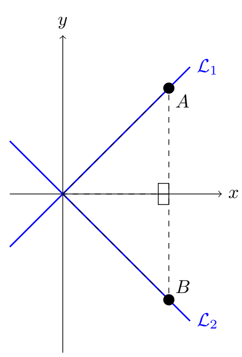
Definición (Rectas perpendiculares) Dos rectas son perpendiculares si se intersecan formando un ángulo recto.

Teorema 4.3. *Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente. Supongamos que las rectas se cruzan en el origen, de no ser así, basta considerar dos rectas paralelas a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$ que sí se crucen en el origen. En particular, esto implica que $(0,0)$ es un punto de $\mathcal{L}_1$ y de $\mathcal{L}_2$. Más aun, usando la ecuación de la recta punto-pendiente, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: y = m_1 x, \\ \mathcal{L}_2 &: y = m_2 x. \end{aligned}$$

Notemos que $A = (1, m_1) \in \mathcal{L}_1$ y $B = (1, m_2) \in \mathcal{L}_2$.



Por el Teorema de Pitágoras, las rectas son perpediculares si y sólo si

$$\begin{aligned} (d(O,A))^2 + (d(O,B))^2 &= (d(A,B))^2 \\ 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2 &= (1-1)^2 + (m_2-m_1)^2 && \text{por definición de distancia} \\ 2 &= -2m_1 m_2 \\ m_1 m_2 &= -1. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.8.
Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 3)$ que es perpendicular a la recta $\mathcal{L} : 4x + 6y + 5 = 0$.

Solución: Ya sabemos que la pendiente de la recta $\mathcal{L}$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, buscamos una recta cuya pendiente también sea $\frac{3}{2}$ pero que pase por el punto $(4, 3)$. Usando la ecuación de la recta punto-pendiente, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{3}{2}(x - 4) \\ 2y - 6 &= 3x - 12 \\ 2y - 3x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

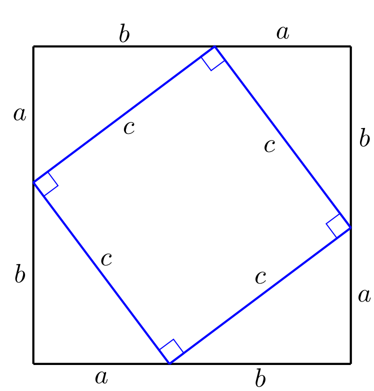
4.5 Material Extra

Teorema de Pitágoras

Teorema 4.4 (Teorema de Pitágoras). *Si en un triángulo rectángulo hay catetos de longitud a y b, y la medida de la hipotenusa es c, entonces se cumple la siguiente relación:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Veamos una demostración del famoso teorema de Pitágoras, con la ayuda de la siguiente figura.



Demostración. Vemos que el área del cuadrado de lado $a+b$ es igual al área del cuadrado inclinado de lado c más el área de los triángulos de los extremos, es decir:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{(ab)}{2}.$$

Desarrollando el cuadrado del binomio a la izquierda y ordenando términos a la derecha se obtiene:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Finalmente, se simplifican los términos $2ab$ y resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

$\square$

Observación: El recíproco del Teorema de Pitágoras también es verdadero; es decir, un triángulo cuyos lados a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo rectángulo.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. ☐ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos x a la distancia de P a la recta OX.

2. ☐ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos x a la distancia de P a la recta OY.

3. ☐ En el sistema de coordenadas cartesianas, dado un punto P, denominamos y a la distancia de P al origen O.

4. ☐ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra arriba de la recta OX, entonces $y > 0$.

5. ☐ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra arriba de la recta OX, entonces $x > 0$.

6. ☐ Si en el sistema de coordenadas cartesianas un punto P se encuentra a la izquierda de la recta OY, entonces $x < 0$.

7. ☐ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia 4 del eje OX.

8. ☐ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia 4 del eje OY.

9. ☐ El punto $P = (-4, 2)$ está a una distancia -4 del origen O.

10. ☐ El eje OY se denomina eje de las abscisas.

11. ☐ El eje OX se denomina eje de las abscisas.

12. ☐ El eje OY se denomina eje de las ordenadas.

13. ☐ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = y = 0\}$, corresponde al eje OX.

14. ☐ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, \ y = 0\}$, corresponde al eje OX.

15. ☐ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ y \in \mathbb{R}, \ x = 0\}$, corresponde al eje OX.

16. ☐ El primer cuadrante corresponde al conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, \ y > 0\}$.

17. ☐ El tercer cuadrante corresponde al conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x < 0, \ y < 0\}$.

18. ☐ El segundo cuadrante está incluido en el conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x < 0, \ y \in \mathbb{R}\}$.

19. ☐ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = 0, \vee y = 0\}$, corresponde a unión de los dos ejes OX y OY.

20. ☐ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ xy = 0\}$, corresponde al origen O.

21. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ xy \neq 0\}$, contiene a todo el plano geométrico, salvo al origen.

22. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = 3\}$, corresponde a una recta horizontal.

23. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x = 2\}$, corresponde a una que pasa por el punto $(2, 54)$.

24. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ y = -1\}$, corresponde a una recta horizontal qeu está abajo del eje OX.

25. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$.

26. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

27. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre ellos corresponde a $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

28. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 3\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen.

29. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = x\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen.

30. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ (x + 1)^2 + y^2 = 3\}$, corresponde a una circunferencia con centro en el el punto $(-1, 0)$.

31. $\square$ Los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 1$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio 1.

32. $\square$ Los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 - 4y = 0$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(0, 2)$ y radio 2.

33. $\square$ Los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 - 4y = 0$, corresponden a aquellos de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

34. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$, siempre corresponde a una circunferencia.

35. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$ corresponde a una circunferencia sólo en el caso que A, B y C son positivos.

36. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0\}$ corresponde a una circunferencia si $A^2 + B^2 - 4C \geq 0$.

37. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 > 4\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

38. $\square$ El conjunto $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

39. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ x^2 + (y-1)^2 - 5 \leq 0\}$ corresponde a los puntos al interior de la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 5.

40. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2$ entonces la recta que pasa por A y B es horizontal.

41. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2$ entonces la recta que pasa por A y B es vertical.

42. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos, si $x_1 = x_2 = 0$ la recta que pasa por A y B es el eje OY.

43. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos en ambas coordenadas, si un punto P pertenece al segmento $\overline{AB}$ entonces pertenece a la recta que pasa por A y B.

44. $\square$ Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ distintos en ambas coordenadas, si un punto P cumple que A pertenece al segmento $\overline{PB}$ entonces pertenece a la recta que pasa por A y B.

45. $\square$ La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es $(x - x_1)(x_2 - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

46. $\square$ La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.

47. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ siempre corresponde a una recta.

48. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ corresponde a una recta siempre que $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

49. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$ corresponde a una recta siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

50. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$, con $a = 0$ y $b \neq 0$ corresponde a una recta inclinada.

51. $\square$ El conjunto $A = \{(x,y) \ : \ ax + by + c = 0\}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ corresponde a una recta inclinada.

52. $\square$ Dada una recta $L : ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera en ella, el cuociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.

53. $\square$ Dada una recta $L : ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera en ella, el cuociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es igual a $b - a$.

54. $\square$ Si m es la pendiente de una recta L, entonces esta se puede escribir como $(y - y_0) = m(x - x_0)$, con (x_0, y_0) cualquier punto que pertenezca a ella.

55. $\square$ Si m es la pendiente de una recta L, entonces esta se puede escribir como $m(y - y_0) = (x - x_0)$, con (x_0, y_0) cualquier punto que pertenezca a ella.

Guía de Ejercicios

(1) Dada la ecuación de la recta $y + 7x = 2y - 1$, determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

(a) $(1, 0)$.

(b) $(0, 0)$.

(c) $(1, 8)$.

(d) $(15, 2)$.

(e) $(1, 15)$.

(2) Dada la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$, determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

(a) $(1, -1)$.

(b) $(1, 1)$.

(c) $(2, -1)$.

(d) $(1, 0)$.

(e) $(0, -1)$.

(3) Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:

(a) Tiene pendiente 0 y pasa por $(-1, 2)$.

(b) Pasa por $(3, 2)$ y $(9, 7)$.

(c) Pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -8.

(d) Pasa por la intersección de $L_1 : x = 0$ con $L_2 : y = -1$ y tiene pendiente 6.

(e) Pasa por la intersección de $L_1 : 2x + y = 0$ con $L_2 : x = -2y$ y la intersección de $L_3 : 3x - 6y = 2$ con $L_4 : 4x + 1 = 0$.

(4) Determine las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

(a) Radio 2 y centro en $(1, 2)$.

(b) Pasa por $(-2, 0)$, tiene radio 2 y la coordenada x del centro es 1. >Es única la solución?.

(c) Pasa por $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.¿Es única la solución?.

(5) Considere la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

(a) ¿Bajo qué condiciones sobre los coeficientes A, B, C, D, E, la ecuación representa una recta?. En este caso, ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(b) ¿Bajo qué condiciones sobre los coeficientes A, B, C, D, E, la ecuación representa una circunferencia?. En este caso, ¿Cuál es el centro y el radio?

(6) Dadas las siguientes ecuaciones, determine si representan rectas o circunferencias. Explicitar pendiente y coeficiente de posición, o bien, centro y radio, según corresponda.

(a) $2y + 3x^2 = 3(y + x)^2 - 3y^2$.

(b) $3x^2 + 2y^2 = (y + 1)^2 + 5$.

(c) $2 + y = 3(y + x)$.

(d) $(x + y)^2 = x + y + 2xy$.

(e) $2x^2 + 3x + 2y^2 + 5y = 0$.

(f) $(x + y)^2 = (x - y)^2$.

(g) $y + 2x = 2(y + x) - 1$.

(7) Escriba de las cuatro formas distintas vistas en clase, las siguientes rectas. En cada caso, indique pendiente y coeficiente de posición:

(a) $y = 3x + 2$.

(b) $x = 2y + 1$.

(c) $2 + y + x = 0$.

(d) $(y - 1) = 2(x - 2)$.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

Antes de comenzar, considere las siguientes definiciones preliminares, que necesitará para resolver los problemas.

Preliminar 1: Se dice que dos rectas L y L' son *perpendiculares* si sus pendientes satisfacen que $m_L \cdot m_{L'} = -1$. En el caso de segmentos, se considera la recta que contiene al segmento.

Preliminar 2: La ecuación de la recta *tangente* por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$. P se llama punto de tangencia
.

P1. (15 min.) Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determine la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo que determinado por la intersección de ella con los ejes, queda dimidiado por L.

P2. (15 min.) Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C, varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determine la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.

P3. (15 min.) Dados el punto $P = (a, b)$ y la recta $L : y = mx$, se trazan PH perpendicular a OX y PK perpendicular a L. Si D es el punto medio de OP y M es el punto medio de HK pruebe que DM es perpendicular a HK y $DK = DH$.

P4. (15 min.) Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan, respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determine el lugar geométrico de P.

P5. (30 min.) Sean $L_1 : x + 2y + 4 = 0$, $L_2 : x - y - 1 = 0$, y $L_3 : -x + 3y - 3 = 0$, tres rectas que definen el triángulo ABC. Determine:

a) Perímetro del triángulo ABC.

b) Area del triángulo ABC.

c) La ecuación de la circunferencia circunscrita.

P6. (30 min.) Se consideran tres puntos O, A, B situados sobre un recta y se contruyen dos semicircunferencias de diámetros OA y OB, respectivamente. Desde el punto medio M del trazo AB se levanta la perpendicular, cortando a la circunferencia mayor en R y luego se traza la tangente MP a la circunferencia menor, siendo P el punto de tangencia. Demuestre que O, P y R se encuentran sobre una misma recta.

P7. (30 min.) La base de un triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$. El vértice C está sobre la recta $y = c$, $b > 0$ y $c > 0$. Determine el lugar geométrico correspondiente a la intersección de las tres alturas.

SEMANA 5:

Secciones Cónicas

Definición (Cónica) Sean D y F una recta y un punto del plano tales que $F \notin D$. Sea e un número positivo.

Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia a F es e-veces su distancia a la recta D.

Es decir:

$$P \in \text{Cónica} \iff d(P, F) = e \cdot d(P, D), \qquad e > 0$$

- F es llamado **foco** de la cónica.
- D es llamada **directriz** de la cónica (veremos sólo el caso en que es vertical u horizontal).
- e es llamada **excentricidad** de la cónica.

Además,

- Si $e < 1$ la cónica se llamará **Elipse**.
- Si $e = 1$ la cónica se llamará **Parábola**.
- Si $e > 1$ la cónica se llamará **Hipérbola**.

5.1 Parábola

Definición (Parábola) Una **parábola** corresponde al caso $e = 1$.

Para escribir su ecuación, consideraremos que el foco está en la ubicación $F = (0, p)$, donde $p \neq 0$, y que la directriz D es la recta horizontal de ecuación $y = -p$. Con esto, el origen es un punto de la parábola ya que dista una distancia $|p|$ tanto de F como de D.

Para escribir la ecuación de la parábola, consideremos un punto $P = (x, y)$ cualquiera del plano e impongamos que su distancia a F y a D sean iguales:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \text{Parábola} &\iff d(P, F) = d(P, D), \\ &\iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|, \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\ &\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2, \\ &\iff x^2 = 4py, \\ &\iff y = \frac{1}{4p}x^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Gráfico de la parábola

Consideremos el caso $p > 0$. Entonces podemos apreciar lo siguiente:

- El punto $(0, 0)$ evidentemente satisface la ecuación de la parábola. Luego, la parábola pasa por el origen, como ya habíamos observado.
- Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación (5.1). Sin embargo, como $(-x)^2 = x^2$, se concluye que el punto $P' = (-x, y)$ también satisface la ecuación de la parábola (5.1); o sea, pertenece a ella. Notemos que P' es el punto simétrico de P con respecto al eje OY.

  En consecuencia, la **parábola es una curva simétrica con respecto al eje** OY.
- Como $x^2 \geq 0$, todos los puntos de la parábola deben tener ordenada del mismo signo que p, es decir, $y \geq 0$. Por lo tanto, el gráfico de la parábola debe estar contenido en el primer y segundo cuadrante, además del origen.

  La intersección entre la parábola y el eje de simetría se llama *vértice de la parábola*. En este caso, el vértice es el origen $(0, 0)$.
- En el primer cuadrante podemos calcular los valores de y obtenidos para diferentes valores de x. Si se consideran valores cada vez mayores de x, se obtienen valores cada vez mayores de y. En otras palabras, la parábola es una curva creciente en este cuadrante.

Por todo lo anterior el gráfico de la parábola se puede bosquejar como se muestra en la Figura 4.

Definición (Ecuación de la parábola con eje vertical) La ecuación de la parábola simétrica con respecto al eje OY cuyo foco es $F = (0, p)$ y su directriz es $y = -p$, $p \neq 0$, queda dada por:

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Su vértice es el origen $(0, 0)$.

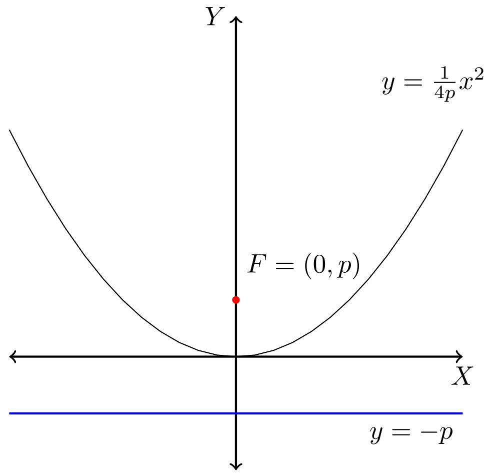


Figura 4: Gráfico de la parábola.

Observación: El gráfico en el caso $p < 0$ es análogo al anterior, pero **abierto hacia abajo**.

Ejemplo 5.1.
Halle una ecuación para la parábolas con vértice $(0, 0)$, foco $F = (0, 2)$.
Solución: Como el foco es $F = (0, 2)$ y el vértice es $(0, 0)$, concluimos que $p = 2$, de modo que su directriz es $y = -2$. Entonces la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{1}{4 \cdot 2}x^2 = \frac{1}{8}x^2.$$

Como $p = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba. ¿Podrías trazar su gráfica?

Ejemplo 5.2.
Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$.
Solución: Para encontrar el parámetro p, escribimos

$$y = -x^2 = \frac{1}{4p}x^2 \iff p = -\frac{1}{4}.$$

Entonces el foco es $F = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. Es una parábola con eje vertical que se abre hacia abajo. ¿Podrías bosquejar su gráfica?

Si escribiéramos la ecuación de la parábola en el caso de directriz vertical $x = -p$ y foco $F = (p, 0)$, repitiendo el mismo proceso anterior, obtendríamos una parábola con eje horizontal descrita por la siguiente ecuación:

Definición (Ecuación de la parábola con eje horizontal) La ecuación de la parábola simétrica con respecto al eje OX cuyo foco es $F = (p, 0)$ y su directriz es $x = -p$, $p \neq 0$, queda dada por:

$$y^2 = 4px.$$

Su vértice es el origen $(0, 0)$. La parábola es abierta hacia la derecha si $p > 0$ o abierta hacia la izquierda si $p < 0$

Ejemplo 5.3.
Una parábola tiene ecuación $6x+y^2 = 0$. Encuentre el foco y directriz de la parábola.
Solución: Empezamos reescribiendo la ecuación:

$$6x + y^2 = 0 \iff y^2 = -6x.$$

Por lo tanto, se trata de una parábola con eje horizontal. Para encontrar p, escribimos:

$$y^2 = -6x = 4px \iff -6 = 4p \iff p = -\frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, el foco es $F = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Como $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Traslación paralela de ejes

Sean $S = \{OXY\}$ y $S' = \{O'X'Y'\}$ dos sistemas de coordenadas de tal modo que los ejes OX y $O'X'$ son paralelos y tienen el mismo sentido, lo mismo que los ejes OY y $O'Y'$. El origen O' tiene coordenadas (x_0, y_0) en S como muestra la Figura 5. En este caso diremos que el sistema S' es una traslación paralela del sistema S.

Un punto P del plano tendrá coordenadas (x, y) con respecto a S y coordenadas (x', y') con respecto a S'.

Observación: De un esquema sencillo puede apreciarse que:

$$\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{l} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{array}$$

De este modo, cada vez que en la ecuación de un lugar geométrico aparezcan las expresiones $x - x_0$ o $y - y_0$, estas pueden interpretarse como las coordenadas x' e y' de los mismos puntos respecto a un sistema trasladado cuyo origen esta en (x_0, y_0).

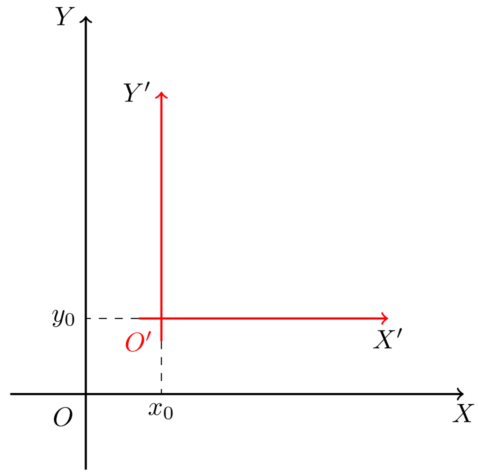


Figura 5: Traslación de sistema de coordenadas.

Ejemplo 5.4.

(1) $\mathcal{L} : y = mx$ es una recta de pendiente m que pasa por el origen y $\mathcal{L}' : (y - y_0) = m(x - x_0)$ es una recta de la misma pendiente que pasa por el punto (x_0, y_0), es decir esta recta pasa por el origen un sistema trasladado al punto (x_0, y_0).

(2) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ es una circunferencia de radio r centrada en el origen y $\mathcal{C}' : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ también corresponde a una circunferencia de radio r pero centrada en (x_0, y_0).

Parábolas trasladadas

Como una consecuencia de la traslación de paralela de ejes, conseguimos escribir las ecuaciones de parábolas trasladadas:

Definición (Parábolas trasladadas) La ecuación

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)$$

corresponde a una **parábola de eje vertical** con vértice en el punto (x_0, y_0), el foco de la parábola tiene coordenadas $(x_0, y_0 + p)$ y la directriz tiene ecuación $y = y_0 - p$.

De la misma forma, la ecuación

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

corresponde a una **parábola de eje horizontal** con vértice en el punto (x_0, y_0), foco en el punto $F = (x_0 + p, y_0)$ y directriz $x = x_0 - p$.

Teorema 5.1. *La ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ representa una parábola de eje vertical con directriz $D : y = \dfrac{-1-\triangle}{4a}$, foco $F = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{1-\triangle}{4a}\right)$ y vértice $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\triangle}{4a}\right)$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$.*

Demostración. Efectivamente, la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ puede ordenarse completando cuadrados perfectos del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c &\iff y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right],\\
&\iff y = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right],\\
&\iff y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],\\
&\iff y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},\\
&\iff \left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,\\
&\iff (y - y_0) = a(x - x_0)^2 \qquad \text{donde } x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}.
\end{aligned}
$$

Es decir, se trata de una parábola de eje vertical, con vértice desplazado a la posición (x_0, y_0). Como ya vimos anteriormente, $p = \dfrac{1}{4a}$ y, por lo tanto, el foco será

$$F = (x_0, y_0 + p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a} + \frac{1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\triangle}{4a}\right).$$

Para la directriz, tendremos

$$y = y_0 - \frac{1}{4a} = -\frac{\triangle}{4a} - \frac{1}{4a} = -\frac{1+\triangle}{4a}.$$

Claramente, las coordenadas del vértice serán $V = (x_0, y_0) = \left(-\dfrac{-b}{2a}, -\dfrac{\triangle}{4a}\right)$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$. $\square$

Ejemplo 5.5.
Determine el vértice, foco y directriz de la parábola:

$$x^2 - 4x - 8y + 28 = 0.$$

Solución: Completemos el cuadrado en x:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 8y + 28 = 0 &\iff x^2 - 4x - 8y + 28 + 4 - 4 = 0, \\ &\iff (x-2)^2 - 8y + 24 = 0, \\ &\iff (x-2)^2 - 8(y-3) = 0, \\ &\iff \frac{1}{8}(x-2)^2 = (y-3). \end{aligned}$$

Obtuvimos, entonces, una parábola con eje vertical con vértice en $(2,3)$. Como $4p = 8$, tenemos $p = 2$. El foco está en $F = (2, 3+p) = (2,5)$ y la directriz es la recta cuya ecuación es $y = 3 - p = 1$.

5.2 Elipse

Definición (Elipse) La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.

Para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la elipse es

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \text{Elipse} &\iff d(P,F) = e\, d(P,D) \\ &\iff \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x-d|, \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\ &\iff x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right), \\ &\iff x^2(1-e^2) + 2x(e^2d - f) + y^2 = e^2d^2 - f^2. \end{aligned}$$

Como la elección del foco y la directriz se ha realizado para que la ecuación sea simple, impondremos que $f = e^2 d$, con esto eliminamos el factor de primer grado en la ecuación y nos ahorramos una completación de cuadrado perfecto. Con esto, la ecuación de la elipse se reduce a

$$x^2(1-e^2) + y^2 = e^2d^2(1-e^2).$$

En la última expresión podemos dividir por $e^2d^2(1-e^2)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2d^2} + \frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)} = 1.$$

Si en esta ecuación llamamos $a = ed$ y $b = ed\sqrt{1-e^2}$, entonces tendremos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde
$$f = e^2 d = ae, \qquad d = \frac{a}{e}.$$
Además,
$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \implies e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$
En consecuencia, la ecuación de la elipse se puede escribir
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a > b,$$
con
$$\begin{array}{ll} \text{Excentricidad:} & e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \\ \text{Foco:} & F = (ae, 0), \\ \text{Directriz:} & D : x = \dfrac{a}{e}. \end{array}$$

Gráfico de la elipse

- Dado que en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2 = y^2$ y además $(-x)^2 = x^2$, luego los puntos $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.

  Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

- En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$
  De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \leq a$, luego el gráfico de la elipse debe hacerse sólo en la zona entre $x = 0$ y $x = a$ (del primer cuadrante).

- También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo
$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$
  De aquí vemos que y debe estar comprendido entre $y = 0$ e $y = b$.

- Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$
  Partiendo en $x = 0$ se obtiene $y = b$. Si x crece de 0 hasta a se ve que y decrece de b hasta 0. Al final, cuando $x = a$ se obtiene $y = 0$.

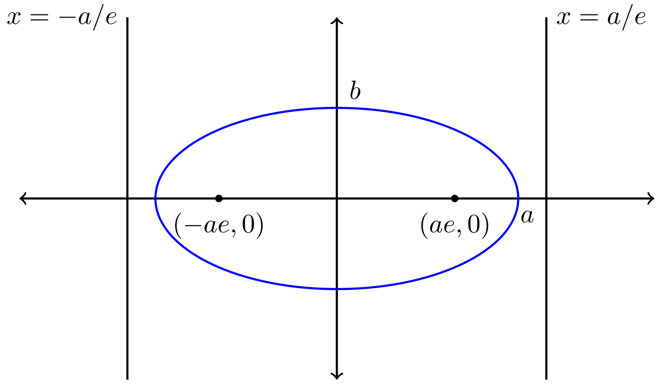


Figura 6: Gráfico de la elipse.

Luego, el gráfico de la elipse se puede observar en la Figura 6.

Observación:

- Por la simetría del gráfico, se aprecia fácilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\dfrac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la elipse. Por lo tanto la elipse tiene dos focos y dos directrices.

- Notemos que en nuestros cálculos asumimos $a > b$. Si $a < b$, se puede argumentar de la misma forma, obteniendo una elipse pero orientada verticalmente, donde se han intercambiado los roles de x e y y los roles de a y b, de modo que $e = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, $F = (0, be)$, $F' = (0, -be)$, $D : y = \dfrac{b}{e}$ y $D' : y = -\dfrac{b}{e}$.

Podemos sintetizar toda la información obtenida y escribir la ecuación de la elipse de la siguiente manera:

Definición (Ecuación de la elipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con} \quad a \neq b,$$

corresponde siempre a una **elipse**.

- Si $a > b > 0$, entonces se trata de una **elipse con eje mayor horizontal** y:

$$\begin{array}{ll} \text{Excentricidad:} & e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \\ \text{Focos:} & F = (ae, 0), \quad F' = (-ae, 0), \\ \text{Directrices:} & D : x = \dfrac{a}{e}, \quad D' : x = -\dfrac{a}{e}. \end{array}$$

- Si $b > a > 0$, entonces se trata de una **elipse con eje mayor vertical** y:

$$\begin{array}{ll} \text{Excentricidad:} & e = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \\ \text{Focos:} & F = (0, be), \quad F' = (0, -be), \\ \text{Directrices:} & D : y = \dfrac{b}{e}, \quad D' : y = -\dfrac{b}{e}. \end{array}$$

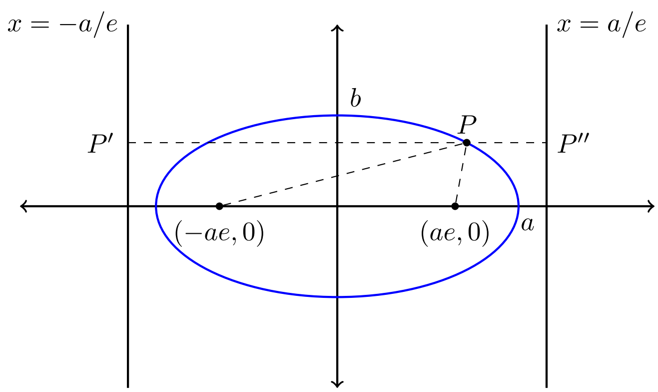
Observación: Si $a = b$ entonces la ecuación corresponde a una circunferencia de radio a y no a una elipse.

Propiedad importante de la elipse

Propiedad 5.1. *Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias desde los focos es una constante. Es decir, sea P un punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con focos F y F'. Se cumple que:*

$$\begin{aligned} d(P,F) + d(P,F') &= 2a, \quad \textit{si} \quad a > b, \\ d(P,F) + d(P,F') &= 2b, \quad \textit{si} \quad b > a. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que $a > b$. El caso $b > a$ es análogo y queda propuesto como ejercicio. Sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Entonces es claro que

$$d(P,F) = e\, d(P,D) = e\, d(P,P') \quad \text{y} \quad d(P,F') = e\, d(P,D') = e\, d(P,P'').$$

Luego

$$d(P,F) + d(P,F') = e\,(d(P,P') + d(P,P'')) = e\, d(P',P'') = e\frac{2a}{e} = 2a.$$

es decir

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a.$$

□

5.3 Hipérbola

> DEFINICIÓN La **hipérbola** corresponde al caso $e > 1$.

Nuevamente, para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la hipérbola es

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \text{Hipérbola} &\iff d(P, F) = e\, d(P, D), \\
&\iff \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x - d|, \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\
&\iff x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right), \\
&\iff -x^2(e^2 - 1) + 2x(e^2 d - f) + y^2 = e^2 d^2 - f^2.
\end{aligned}$$

En este caso también elegiremos $f = e^2 d$ para evitarnos una completación de cuadrados.

Con esto la ecuación de la hipérbola será:

$$-x^2(e^2 - 1) + y^2 = -e^2 d^2 (e^2 - 1).$$

En la última expresión podemos dividir por $-e^2 d^2 (e^2 - 1)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2 d^2} - \frac{y^2}{e^2 d^2 (e^2 - 1)} = 1.$$

Aquí, si llamemos $a = ed$ y $b = ed\sqrt{e^2 - 1}$, entonces tendremos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde

$$f = e^2 d = ae \qquad \text{y} \qquad d = \frac{a}{e}.$$

Además

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \implies e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

En consecuencia, la ecuación de la hipérbola se puede escribir

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \;\; a > b,$$

con:

$$\begin{array}{ll}
\text{Excentricidad:} & e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \\
\text{Foco:} & F = (ae, 0), \\
\text{Directriz:} & D : x = \dfrac{a}{e}.
\end{array}$$

Gráfico de la hipérbola

- Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2 = y^2$ y además $(-x)^2 = x^2$, luego los puntos $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.

  Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la hipérbola sólo en el primer cuadrante.

- En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

  De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$. Luego, el gráfico de la hipérbola debe hacerse sólo en la zona a la derecha de $x = a$ (en el primer cuadrante).

- También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

  De aquí vemos que y puede tomar cualquier valor.

- Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

  Luego, para $x = a$ se obtiene $y = 0$.
  Además, se nota que si x crece, entonces y también crece.
  Por último si x toma valores muy grandes. De esta forma, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} \sim \frac{b}{a}x$$

  Es decir, la hipérbola se aproxima a la recta $y = \frac{b}{a}x$. Dicha recta se llama *asíntota de la hipérbola*.

  Por simetría, vemos que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son todas las asíntotas de la hipérbola.

Luego el gráfico de la hipérbola se puede bosquejar como muestra la Figura 7.

Observación:

- Por la simetría del gráfico, se aprecia fácilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\frac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la hipérbola. Por lo tanto la hipérbola tiene dos focos y dos directrices.

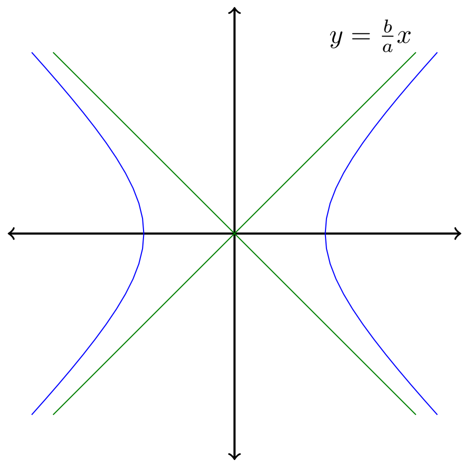


Figura 7: Gráfico de la hipérbola.

- Si ahora asumimos $b > a$, podemos hacer las mismas cuentas, cambiando los roles entre x e y, y entre a y b.

Podemos sinterizar toda la información obtenida y escribir la ecuación de la hipérbole de la siguiente manera:

Definición (Ecuación de la hipérbola) La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

corresponde a una **hipérbola** con:

$$\begin{array}{ll} \text{Focos:} & F = (ae, 0), \quad F' = (-ae, 0), \\ \text{Directriz:} & D : x = \dfrac{a}{e}, \quad D' : x = -\dfrac{a}{e}. \end{array}$$

La ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad b > a > 0$$

corresponde a una **hipérbola** con con:

$$\begin{array}{ll} \text{Focos:} & F = (0, be), \quad F' = (0, -be), \\ \text{Directrices:} & D : y = \dfrac{b}{e}, \quad D' : y = -\dfrac{b}{e}. \end{array}$$

En ambos casos, la excentricidad es $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ y sus asíntotas son $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Observación: Si $a = b$ entonces la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ se llama *hipérbola equilátera*. Estas hipérbolas tienen excentricidad $e = \sqrt{2}$ y sus asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes.

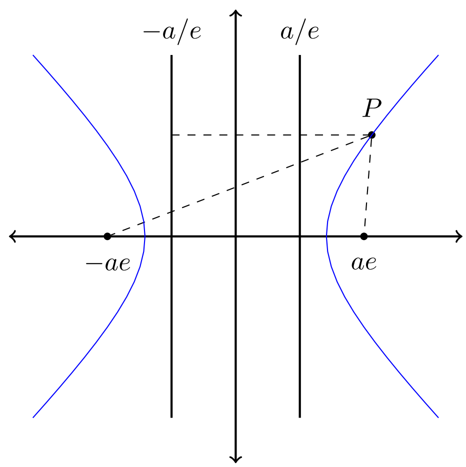
Propiedad importante de la hipérbola

Propiedad 5.2. *Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano cuya diferencia desde los focos es una constante. Es decir, sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, con focos F y F'. Se cumple que*

$$d(P, F') - d(P, F) = \pm 2a.$$

Lo propio también es cierto para la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $b > a$.

Demostración. Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Entonces es claro que

$$d(P, F) = e\, d(P, P') \text{ y } d(P, F') = e\, d(P, P'').$$

Luego

$$d(P, F') - d(P, F) = e\,(d(P, P'') - d(P, P')) = e\, d(P', P'') = e\frac{2a}{e} = 2a.$$

Es decir

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a.$$

Por supuesto, de haber elegido F y F' con signos opuestos, el resultado se cumpliría con el signo contrario. □

5.4 Material extra

Cónicas e hipérbolas trasladadas

Igual que con la ecuación de la parábola, es posible usar la traslación de ejes vista anteriormente para escribir las ecuaciones de cónicas e hipérbolas trasladadas:

Definición (Ecuación de la elipse trasladada)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad \text{con} \quad a\neq b,$$

corresponde siempre a una **elipse con centro** (x_0,y_0).

- Si $a>b>0$, entonces se trata de una **elipse con eje mayor horizontal** y:

$$\begin{array}{ll} \text{Excentricidad:} & e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \\ \text{Focos:} & F=(ae+x_0,y_0), \quad F'=(-ae+x_0,y_0), \\ \text{Directrices:} & D: x=\dfrac{a}{e}+x_0, \quad D': x=-\dfrac{a}{e}+x_0. \end{array}$$

- Si $b>a>0$, entonces se trata de una **elipse con eje mayor vertical** y:

$$\begin{array}{ll} \text{Excentricidad:} & e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}, \\ \text{Focos:} & F=(x_0,be+y_0), \quad F'=(x_0,-be+y_0), \\ \text{Directrices:} & D: y=\dfrac{b}{e}+y_0, \quad D': y=-\dfrac{b}{e}+y_0. \end{array}$$

Definición (Ecuación de la hipérbola trasladada) La ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad a>b>0$$

corresponde a una **hipérbola trasladada con centro** (x_0,y_0) y:

$$\begin{array}{ll} \text{Focos:} & F=(ae+x_0,y_0), \quad F'=(-ae+x_0,y_0), \\ \text{Directriz:} & D: x=\dfrac{a}{e}+x_0, \quad D': x=-\dfrac{a}{e}+x_0. \end{array}$$

La ecuación

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1, \quad b>a>0$$

corresponde a una **hipérbola trasladada con centro** (x_0,y_0) con:

$$\begin{array}{ll} \text{Focos:} & F=(x_0,y_0+be), \quad F'=(x_0,y_0-be), \\ \text{Directrices:} & D: y=\dfrac{b}{e}+y_0, \quad D': y=-\dfrac{b}{e}+y_0. \end{array}$$

En ambos casos, la excentricidad es $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y sus asíntotas son $y-y_0=\pm\dfrac{b}{a}(x-x_0)$.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ Toda cónica C cumple que $C \in \mathbb{R}^2$.

2. $\square$ Para determinar una cónica nos basta conocer su excentricidad, directriz y foco.

3. $\square$ Si una parábola tiene foco $F = (0, p)$ su excentricidad es $e = p$.

4. $\square$ Se puede determinar el vértice de una parábola, conociendo el foco y la directriz.

5. $\square$ El eje de simetría de una parábola pasa por el vértice y el foco.

6. $\square$ Una parábola cuya recta directriz es el eje OY es una parábola horizontal.

7. $\square$ El foco es un punto que pertenece a la parábola.

8. $\square$ Sea P una parábola y D su directriz. Se cumple que $P \cap D = \phi$.

9. $\square$ Toda parábola cuyo vértice se ubica en (x_v, y_v), tiene como eje de simetría a la recta $y = y_v$.

10. $\square$ Toda parábola tiene un eje de simetría.

11. $\square$ Una recta directriz vertical genera una parábola cuya ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

12. $\square$ La recta directriz de $y = \dfrac{1}{4p}x^2$ es perpendicular a la recta directriz de $y = 4px^2$.

13. $\square$ La ecuación $2y + 2x - x^2 = 0$ representa una parábola.

14. $\square$ La ecuación $2y + 2x - x^2 = 0$ representa una parábola con vértice en $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

15. $\square$ La ecuación $y + 3x = x^2$ representa una parábola con vértice en $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

16. $\square$ La ecuación $2y + 2x = x^2 - 1$ representa una parábola con vértice en $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

17. $\square$ Si $y_0 \neq 0, x_0 \neq 0$, las parábolas $P_1 : (y - y_0) = (x - x_0)^2$ y $P_2 : (y - y_0) = x^2$ tienen la misma recta directriz.

18. $\square$ Si $y_0 \neq 0, x_0 \neq 0$, las parábolas $P_1 : (y - y_0) = (x - x_0)^2$ y $P_2 : y = (x - x_0)^2$ tienen la misma recta directriz.

19. $\square$ Las parábolas $P_1 : (y - y_0) = (x - x_0)^2$ y $P_2 : y = (x - x_0)^2$ tienen el mismo eje de simetría.

20. ☐ La ecuación $y = x^2 + x + 1$ representa una parábola de foco $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

21. ☐ En una elipse la excentridad es siempre mayor que 1.

22. ☐ La ecuación $x + 2y^2 = 2$ corresponde a la ecuación de una elipse.

23. ☐ Toda elipse tiene dos ejes de simetría.

24. ☐ La ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ representa una elipse con excentricidad $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

25. ☐ La ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ representa una elipse con excentricidad $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

26. ☐ La ecuación $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = -1$ representa una elipse.

27. ☐ Toda elipse interseca al eje OY en dos puntos distintos.

28. ☐ La intersección entre una elipse y su recta directriz siempre son dos puntos distintos.

29. ☐ Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ representa una elipse.

30. ☐ Para todo $a > 0, b < 0$ la ecuación $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ representa una elipse.

31. ☐ Para todo $a < 0, b < 0$ la ecuación $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a + b$ representa una elipse.

32. ☐ Una hipérbola siempre tiene una excentricidad mayor a la de una parábola.

33. ☐ Una hipérbola siempre tiene una excentricidad menor a la de una elipse.

34. ☐ Toda hipérbola tiene dos ejes de simetría.

35. ☐ Toda hipérbola tiene dos rectas asíntotas.

36. ☐ La intersección entre una hipérbola y sus asíntotas es un conjunto de cuatro elementos.

37. ☐ La ecuación $x^2 = 1 + y^2$ representa la ecuación de una hipérbola.

38. ☐ Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ representa una hipérbola.

39. ☐ Para todo $a > 0, b < 0$ la ecuación $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ representa una hipérbola.

40. ☐ Para todo $a < 0, b < 0$ la ecuación $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = a + b$ representa una hipérbola.

41. $\square$ La ecuación $x^2 = 1 - y^2$ representa a una hipérbola.

42. $\square$ La recta $y = x$ es asíntota de la hipérbola $2x^2 - y^2 = 1$.

43. $\square$ La excentricidad de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ es $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

44. $\square$ La recta directriz de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ es $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

45. $\square$ La recta directriz de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ es $x = 0$.

46. $\square$ La recta directriz de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$ es $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

47. $\square$ La ecuación $y = \sqrt{x^2 - 1}$ representa una parábola.

48. $\square$ La ecuación $y = \sqrt{x^2 - 1}$ representa una elipse.

49. $\square$ La ecuación $y = \sqrt{x^2 - 1}$ representa una hipérbola.

50. $\square$ Toda parábola tiene dos rectas asíntotas.

51. $\square$ El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}$ es una cónica.

52. $\square$ El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y = 1, |x| \leq 10\}$ es una cónica.

53. $\square$ El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1, |x| \leq 10\}$ es una cónica.

54. $\square$ El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y^2 = 1, |x| \leq 10\}$ es una cónica.

55. $\square$ Si dos cónicas tienen la misma excentricidad, entonces son la misma cónica.

56. $\square$ Si dos cónicas tienen la misma directriz, entonces son la misma cónica.

57. $\square$ Si dos cónicas tienen el mismo foco, entonces son la misma cónica.

58. $\square$ Si dos cónicas tienen el mismo foco y directriz, entonces son la misma cónica.

Guía de Ejercicios

(1) Para las siguientes elipses, encuentre su intersección con los ejes OX y OY, excentricidad y focos.

(a) $(y-2)^2 + 2(x-3)^2 = 16.$

(b) $(x-2)^2 + 2(y-3)^2 = 16.$

(c) $y^2 + 4x^2 - 3y = 12.$

(2) Para las siguientes hipérbolas, encuentre los focos, rectas directrices y rectas asíntotas.

(a) $x^2 - 2y^2 = 1.$

(b) $(x-1)^2 - (y-3)^2 = 16.$

(c) $2y^2 - 4x^2 = 12.$

(3) Para las siguientes parábolas, encuentre el foco, directriz, vértice, eje de simetría, intersección con los ejes OX y OY.

(a) $x^2 - 2y = 1.$

(b) $x - (y-3)^2 = 16.$

(c) $2x^2 - 2x - 4y = 12.$

(4) Dada las siguientes ecuaciones, determine a qué cónica corresponde e identifíquela completamente. Haga un gráfico en donde se muestren los aspectos relevantes de la cónica.

(a) $x^2 + 2y^2 + 2x = 1.$

(b) $x - y^2 + 3y = 16 - x^2.$

(c) $2x^2 - 3x - 6y = 4.$

(d) $2x^2 + 3x + 2y^2 - 4y - 1 = 0.$

(5) Determinar los parámetros x_0, y_0, p tales que la parábola $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$ cumpla lo siguiente:

(a) Pasa por los focos de la elipse $2x^2 + y^2 = 1.$

(b) Su directriz es la recta $y = -5.$

(c) El parámetro p es positivo.

(6) Calcular la excentricidad de una elipse en la que la distancia entre sus focos es la mitad de la distancia entre sus directrices.

(7) Calcular la excentricidad de una hipérbola en la que la distancia entre sus focos es el doble de la distancia entre sus directrices.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. (20 min.) Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola, $P \neq Q$. PQ corta el eje de simetría de la parábola en R. Pruebe que el foco divide al trazo OR en la razón 1:3.

P2. (20 min.) Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encuentre el punto (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice propiedades de parábolas para determinar el máximo.

P3. (20 min.) Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ demuestre que $AP \cdot BP = a^2$, donde P es un punto sobre la hipérbola y A y B son las intersecciones de una recta que pasa por P paralela al eje X, con las asíntotas de la hipérbola.

P4. (20 min.) Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - y^2 b^2 = 1$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. La recta normal a la hipérbola por P corta al eje OX en A y al eje OY en B. Demuestre que P divide al trazo AB en una razón constante.

P5. Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

- **(a)** (10 min.) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.
- **(b)** (10 min.) Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m.
- **(c)** (5 min.) Encuentre el punto medio A del segmento PQ.
- **(d)** (20 min.) Pruebe que $\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.
- **(e)** (15 min.) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

P6. (20 min.) Dada la recta $L : y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera P sobre L y su simétrico Q con respecto al origen. Las rectas PA y QB se cortan en un punto M. Determine el lugar geométrico de M cuando el punto P se desplaza sobre L.

P7. (20 min.) Considere la ecuacón de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos VQ, donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.

P8. (20 min.)Considere la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \dfrac{b}{a}x$ interseca a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos de naturaleza arbitraria. Una *función f de A en B* es una *correspondencia* entre los elementos de A y los elementos de B de tal modo que a cada $x \in A$ se le hace *corresponder* un único elemento $y \in B$ que denotamos por $y = f(x)$. Utilizaremos la notación habitual,

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

para denotar que f es una función de A en B donde a x le asocia $y = f(x)$. En el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, se dice que la función es de *variable real*. Es decir, las funciones reales de variable real son:

$$\begin{array}{rcl} f : A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

En este curso, todas las funciones serán de variable real y uno de los objetivos principales de este año es poder analizar una función a variable real de manera completa.

6.1 Elementos básicos de una función

Dada una función de variable real $f : A \longrightarrow B$, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- A se llama **dominio** de la función.
- B, se llama **codominio** de la función.
- x se llama **variable** de la función.
- $y = f(x)$ se llama **imagen** de x por f y se lee '*f de x*'.

Es importante remarcar que una **función está definida por tres elementos**: el dominio, el codominio y la ley de correspondencia. Esto quiere decir que si $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A \neq C$ y $B \neq D$ entonces

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{y} \quad f : C \longrightarrow D,$$

denotan funciones *diferentes*.

En nuestro caso, una función puede especificarse dando sólo la regla $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x. Cuando esto suceda, entenderemos que el codominio es $\mathbb{R}$ y el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la $f(x)$ está bien definido, es decir,

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : y = f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 6.1.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, entonces $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(2) $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(3) Si $f(x) = \sqrt{x + 2|x - 5| - x^2 + |3x - 2|}$, entonces para determinar el dominio de f debe resolverse la inecuación $x + 2|x - 5| - x^2 + |3x - 2| \geq 0$ ya que la raíz cuadrada sólo está definida para reales no negativos.

Observación: La ley de una función ($y = f(x)$) puede ser definida de múltiples formas en cada una de ellas debe cumplirse la condición básica, que para x en el dominio de la función pueda calcularse una única imagen de x.

- $y = f(x)$ tal que $y + x^2 = 5$ corresponde a una función ya que $y = 5 - x^2$ está únicamente definido.
- $y = f(x)$ tal que $x^2 + y^2 = r^2$ **no** corresponde a una función ya que $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ puede tomar dos valores.
- $y = f(x)$ tal que $y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 = r^2$ corresponde a una función **con** $\text{Dom}(f) = [-r.r]$.
- $y = f(x)$ tal que $y < 0 \wedge x^2 + y^2 = r^2$ corresponde a una función **con** $\text{Dom}(f) = (-r.r)$.

6.2 Gráfico de una función

Dada una función f, al variar $x \in \text{Dom}(f)$ su imagen $f(x)$ genera una *curva* en el plano que llamamos gráfico de la función.

DEFINICIÓN Llamaremos **gráfico de una función** f al conjunto de puntos del plano $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{Dom}(f) \wedge y = f(x)\}.$$

Uno de los objetivos de este capítulo es ser capaz de esbozar el gráfico de una función, para lo que deberemos recolectar información básica de la función, como dónde corta los ejes, dónde crece, dónde crece, etc.

Algunos ejemplos de gráficos:

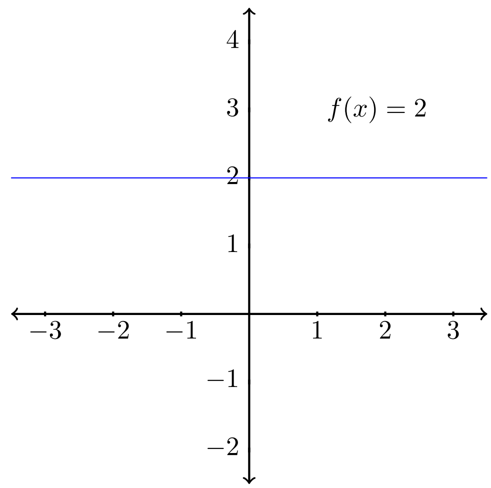


Figura 8: Ejemplo 1

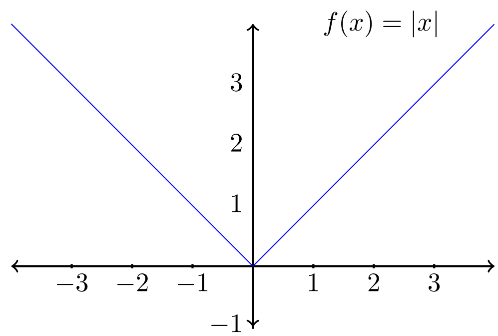


Figura 9: Ejemplo 2

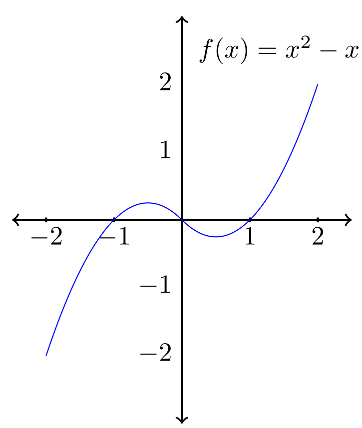


Figura 10: Ejemplo 3

6.3 Ceros de una función

DEFINICIÓN (CEROS DE UNA FUNCIÓN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos **ceros de** f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$.

Gráficamente, los ceros de una función f son los puntos donde el gráfico de f corta al eje OX. Adicionalmente, llamaremos **intersección con el eje** Y al punto de coordenadas $(0, f(0))$.

Ejemplo 6.2.
Considere la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

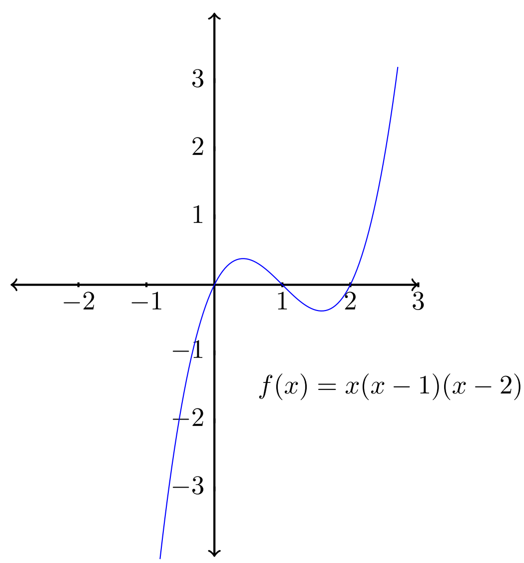


Figura 11: Los ceros son los puntos $0, 1, 2$ donde el gráfico (línea azul) corta el eje OX, y la intersección con el eje Y es el punto $(0, 0)$.

DEFINICIÓN (CONJUNTO IMAGEN) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El **conjunto imagen** de f al conjunto definido por

$$\text{Im}\,(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im}\,(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

De manera más informal, el conjunto imagen de f corresponde a todos los posibles valores que puede tomar $f(x)$ cuando x recorre su dominio.

6.4 Funciones pares e impares

Hay funciones que presentan simetría con respecto a alguno de los ejes o el origen; estas son las funciones pares e impares, como definimos a continuación.

Definición (Función par) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función par** ssi

- $(\forall x \in A) - x \in A$.
- $(\forall x \in A)\, f(-x) = f(x)$.

Un ejemplo fundamental de función par es la función cuadrática $f(x) = x^2$. En efecto, notemos que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que muestra que $f(x) = x^2$ es par. Como ya hemos visto, el gráfico de una función cuadrática corresponde a una parábola con vértice en el punto $(0, 0)$ y que es **simétrica con respecto al eje** OX.

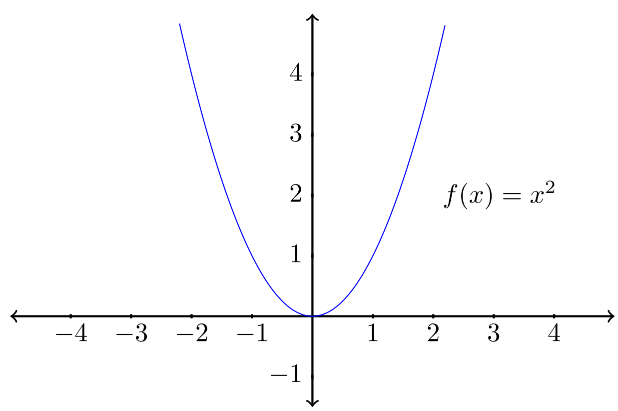


Figura 12: Gráfico de la función $f(x) = x^2$.

En general, si f es una función entonces se tiene que

$$(x, y) \in G_f \implies (-x, y) \in G_f,$$

lo que implica que el gráfico de f es simétrico con respecto al eje OY.

Definición (Función impar) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función impar** ssi

- $(\forall x \in A) - x \in A$.
- $(\forall x \in A)\, f(-x) = -f(x)$.

Un ejemplo fundamental de función impar son las potencias impares, en particular la función $f(x) = x^3$. En este caso, tenemos que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, lo que muestra que f es impar. A continuación mostramos el gráfico de la función $f(x) = x^3$.

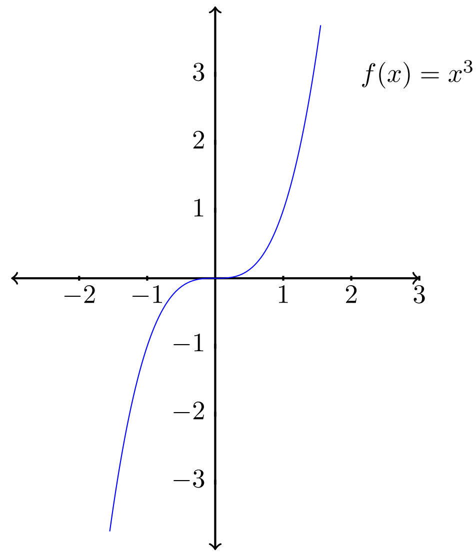


Figura 13: Gráfico de la función $f(x) = x^3$.

En general, si f es una función impar entonces se tiene que

$$(x, y) \in G_f \implies (-x, -y) \in G_f,$$

lo que implica que el gráfico de la función es **simétrico con respecto al origen** O del sistema de coordenadas.

> **Ejemplos:** Algunos ejemplos de funciones.
>
> - $f(x) = 1$ tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Luego la primera condición se cumple. Además $f(-x) = 1 = f(x)$. Luego f es par.
> - $f(x) = x$ tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Además $f(-x) = -x = -f(x)$. Luego f es impar.
> - $f(x) = \sqrt{x}$ tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, luego no cumple la primera condición, en consecuencia, no es par ni impar.

Antes de continuar: ¿Puede una función ser *par* e *impar* al mismo tiempo?
Si una función es par e impar, implica que

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Por lo tanto, la única función que puede satisfacer las condiciones de paridad e imparidad es la función idénticamente cero.

Existen muchos más tipos de simetría que no cubriremos en este curso; sin embargo, es posible definir fácilmente cuándo una función presenta simetría con respecto a una recta vertical. En efecto, puede observarse que el gráfico de una función será simétrico con respecto a una recta vertical de ecuación $x = \ell$ ssi se cumplen las siguientes condiciones:

- $\ell + t \in \mathrm{Dom}(f) \implies \ell - t \in \mathrm{Dom}(f)$.
- $\ell + t \in \mathrm{Dom}(f) \implies f(\ell - t) = f(\ell + t)$.

Ejemplo 6.3.
La función $f(x) = |x-5|$ es simétrica respecto de la recta $x = 5$.

Esto se puede verificar formalmente ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(5-x) &= |(5-x)-5| = |-x| = |x| \\ f(5+x) &= |(5+x)-5| = |x| \end{aligned}$$

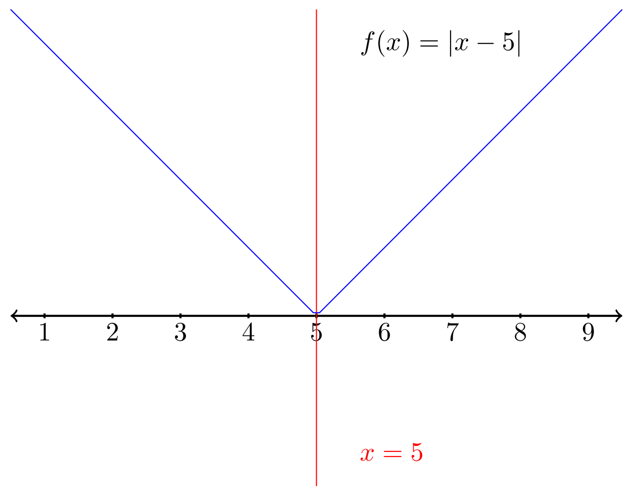


Figura 14: Gráfico de la función $f(x) = |x-5|$ en azul y de la recta $x = 5$ en rojo.

Para efectos prácticos, cuando una función es par, impar o presenta alguna simetría, entonces puede estudiarse sólo en una mitad de su dominio y luego construir su gráfico completo usando dicha simetría.

6.5 Funciones Monótonas

Definición (Crecimiento de funciones) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que:

- f es **creciente** en $B \subseteq A$ ssi $\forall x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f es **decreciente** en $B \subseteq A$ ssi $\forall x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Adicionalmente, agregaremos la palabra estrictamente cuando las desigualdades anteriores se satisfacen en forma estricta.

Si $B = A$ se dirá que f es creciente o decreciente en lugar de decir que es creciente en A o decreciente en A.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN MONÓTONA) Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **monótona** si es o bien creciente o decreciente.

Observación: La negación de la frase "$f(x)$ es creciente", no es la frase "f es decreciente" ya que existen funciones crecientes y decrecientes a la vez y otras que no son ni crecientes ni decrecientes.

6.6 Funciones Acotadas

DEFINICIÓN (FUNCIÓN ACOTADA) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que

- f es *acotada inferiormente* ssi $(\exists a \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\ a \leq f(x)$
- f es *acotada superiormente* ssi $(\exists b \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\ f(x) \leq b$
- f es *acotada* ssi $(\exists a, b \in \mathbb{R})$ tales que $(\forall x \in \operatorname{Dom} f)\ a \leq f(x) \leq b$

De manera equivalente, podemos definir acotamiento de funciones a partir de su imagen:

- f es acotada superiormente ssi $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ lo es.
- f es acotada inferiormente ssi $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ lo es.
- f es acotada si lo es tanto superior como inferiormente.

Proposición 6.1. *f es acotada $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R}^+)$ tal que $(\forall x \in \operatorname{Dom} f), |f(x)| \leq M$.*

Observaciones adicionales

- Si f es acotada superior o inferiormente y $B \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ entonces se pueden determinar las siguientes expresiones:

$$\min_{x \in B} f(x) = \min\{f(x) : x \in B\}$$
$$\max_{x \in B} f(x) = \max\{f(x) : x \in B\}$$

Definición (Mínimo y máximo) Podemos decir que x_0 es **punto mínimo** de f si $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, y para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se cumple $f(x_0) \leq f(x)$. O, equivalentemente $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathrm{Dom}(f)} f(x)$.

De la misma manera, $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es **punto máximo** de f si para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$. O, $f(x_0) = \max\limits_{x \in \mathrm{Dom}(f)} f(x)$.

6.7 Algebra de Funciones.

Sean f y g dos funciones de Dominio D_f y D_g respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante fija. Definimos las funciónes *suma, diferencia, ponderación, producto y cuociente* por:

Definición (Álgebra de funciones)

- **Función suma**

$$f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)\, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- **Función Diferencia** $f - g = f + (-g)$, es decir:

$$f - g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)\, (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- **Ponderación de una función**

$$\lambda f : D_f \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f)\, (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- **Función producto**

$$f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)\, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

- **Función cociente**

$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

  donde $A = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$.

El álgebra de funciones nos permite, dada una lista de funciones 'básicas', construir funciones más complejas. A continuación damos una lista de algunas funciones que aparecerán con frecuencia durante este curso.

(1) La función constante. Esta definida por $f(x) = a$. Tiene $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. $f(-x) = a = f(x)$, luego es una función par.

Si $a = 0$ entonces $f(-x) = -f(x) = 0$ luego sería también impar.

Si $a \neq 0$ entonces no tiene ceros. Si $a = 0$ todos los reales son sus ceros.

Su gráfico es la recta horizontal que pasa por $(0, a)$

(2) La función potencia natural. Esta definida mediante la ecuación $f(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Tiene $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$.

Si $n = 1$ el gráfico es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si $n = 2$ el gráfico es una parábola.

Puesto que $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f(x)$, luego es una función par si n es par y una función impar si n es impar.

Si $x \in \mathbb{R}_{\geq}$ entonces $x^n \in \mathbb{R}_{\geq}$, luego $\{f(x) : x \in \mathbb{R}_{\geq}\} = \mathbb{R}_{\geq}$.

(3) Funciones polinomiales. Son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ son constantes y tienen $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(4) Funciones racionales Son de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ salvo los puntos donde la función Q se anula, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ Q(x) = 0\}.$$

(5) La función raíz enésima. Esta definida mediante la expresión $f(x) = \sqrt[n]{x}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Esta función tiene variadas propiedades dependiendo de la paridad de n.

Su dominio depende de n:

- Si n es par entonces $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$.
- Si n es impar entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Si n es impar entonces $f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -f(x)$. Luego si n impar se trata de una función impar.

Si n par, por simetría respecto al eje Y, $\mathrm{Im}\ (f) = [0, \infty)$.

Si n impar, por simetría respecto al origen O, $\mathrm{Im}\ (f) = \mathbb{R}$.

(6) La función cajón o parte entera. Esta definida por: $f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Tiene $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{Z}$.

Sus ceros son todos los reales en el intervalo $[0, 1)$.

No es una función par ni impar.

Es una función creciente, pero no de forma estricta.

(7) Función opuesta.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Llamaremos función opuesta de f a la función $(-f)$ definida por:

$$-f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)(-f)(x) = -(f(x))$$

El gráfico de la función $(-f)$ es el conjunto simétrico con respecto al eje OX del gráfico de f.

(8) Módulo de una Función. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Llamaremos función módulo de f a la función $|f|$ definida por:

$$|f| : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

El gráfico de la función módulo de f puede obtenerse fácilmente si se conoce el gráfico de f, ya que debe copiarse simétricamente respecto al eje OX los puntos del gráfico de f que queden bajo el eje OX y dejar intactos aquellos puntos que estén sobre el eje OX. Es decir, al tomar módulo a una función, su gráfico se refleja en el eje OX hacia el primer o segundo cuadrante.

(9) Restricción de una función. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $B \subseteq A$. Se llama restricción de f a B a la función $f_{|B}$ definida por:

$$f_{|B} : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in B)\ f_{|B}(x) = f(x).$$

6.8 Estudio de una función

Uno de los objetivos principales de este curso es lograr analizar de manera precisa el comportamiento de funciones de variable real. Con esto nos referimos, al menos en esta parte del curso, a poder describir dónde la función crece/decrece, si es par/impar, cuáles son sus ceros, y esbozar un gráfico aproximado de la función.

Ejemplo 6.4.
Consideremos la función polinómica $f(x) = x^3 - x$, $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ ¿Cuál es la imagen $\mathrm{Im}\ f =$?

Paridad: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ luego f es impar.

Ceros: $f(x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0$ luego los ceros son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

Signos de la función:

$x \in (-\infty, -1)$	$f(x) < 0$
$x \in (-1, 0)$	$f(x) > 0$
$x \in (0, 1)$	$f(x) < 0$
$x \in (1, \infty)$	$f(x) > 0$

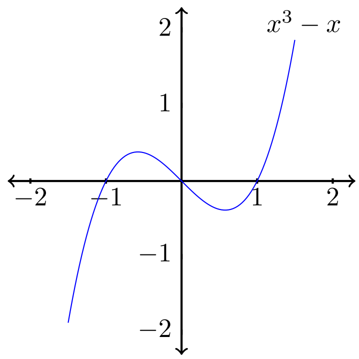


Figura 15: Gráfico de $x^3 - x$.

Ejemplo 6.5.
Consideremos la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

No tiene ceros.

Signos de la función:

$x \in (-\infty, 1)$	$f(x) < 0$
$x \in (1, \infty)$	$f(x) > 0$

Crecimiento de f: (por intervalos)

$$\begin{aligned} 1 < x_1 < x_2 &\implies 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ &\implies \frac{1}{x_2 - 1} < \frac{1}{x_1 - 1} \\ &\implies f(x_2) < f(x_1) \\ &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 < 1 &\implies x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \\ &\implies 1 - x_1 > 1 - x_2 > 0 \\ &\implies \frac{1}{1 - x_2} > \frac{1}{1 - x_1} \\ &\implies \frac{1}{x_2 - 1} < \frac{1}{x_1 - 1} \\ &\implies f(x_2) < f(x_1) \\ &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Luego f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$ por separado.

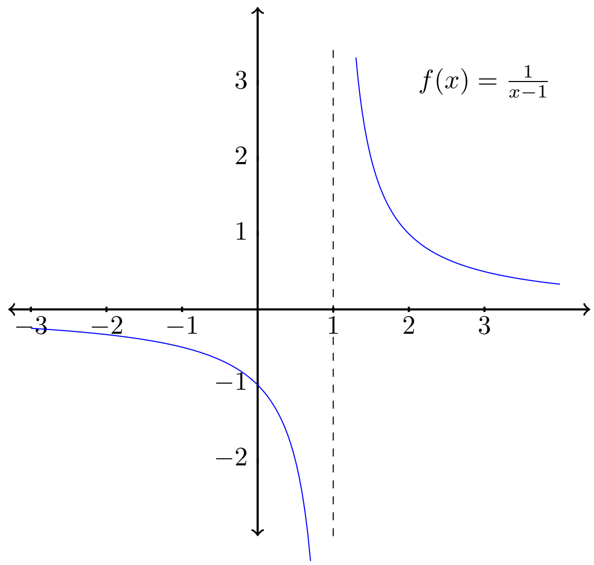


Figura 16: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

6.9 Funciones invertibles y composición de funciones

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \text{Cod }(f)$ una función de variable real.

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2]$.
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi $\text{Im }(f) = \text{Cod }(f)$
- Diremos que f es **biyectiva** ssi f es inyectiva y epiyectiva.

Una manera equivalente de definir inyectividad es mediante su contrarrecíproca, es decir, f es inyectiva ssi

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Estas propiedades también pueden observarse gráficamente:

- f es inyectiva ssi toda recta horizontal intersecta a lo más en un punto al gráfico de f.
- f es epiyectiva ssi toda recta horizontal en el codominio de f intersecta al menos en un punto al gráfico de f.
- f es biyectiva ssi toda recta horizontal en el codominio de f intersecta en exactamente un punto al gráfico de f.

Además, si f es biyectiva, entonces $\forall y \in \text{Cod }(f)$ el problema de encontrar $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $y = f(x)$ tiene solución única. Esto permite definir la inversa de una función, como sigue.

Definición (Función inversa) Sea $f : \text{Dom}(f) \to \text{Cod }(f)$ una función biyectiva. La **función inversa de** f es la función $f^{-1} : \text{Cod }(f) \to \text{Dom}(f)$ definida por la regla

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y).$$

Observación: En el caso de funciones reales de variable real existen varias de ellas que no son inyectivas o no son epiyectivas y por lo tanto no tienen inversa. sin embargo, se puede construir una función inversa por el siguiente método.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera no invertible.

- Se determina $B \subseteq A$ tal que $f|_B$ sea inyectiva.
- De igual modo se restringe el codominio $\mathbb{R}$ a $\text{Im }(f|_B)$. Con esto $f|_B$ se hace biyectiva y luego invertible.

Ejemplo 6.6.
Consideremos la función

$$\begin{aligned} f \,:\, (-\infty, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{1-x}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

- Analicemos la inyectividad: Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - x_1 = 1 - x_2 \qquad \text{elevando al cuadrado} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, la función es inyectiva.

- Analicemos la epiyectividad: Nos preguntamos si para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (-\infty, 1]$ tal que $y = f(x) = \sqrt{1-x}$. Notemos que esto no siempre es cierto, por ejemplo, si $y < 0$. Por lo tanto, no podemos decir que la función sea epiyectiva.

La función definida como en (6.1) no es biyectiva ya que no se cumple la epiyectividad. Sin embargo, podemos restringir el codominio y así "solucionar" el problema. Redefinamos

$$\begin{aligned} g \,:\, (-\infty, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

Dado que g se define por la misma ley y tiene el mismo dominio que f, se cumple que g es inyectiva. Ahora sí, comprobemos que es epiyectiva. Para ellos, dado $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, buscamos $x \in (-\infty, 1]$ tal que $f(x) = y$. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned} y = f(x) = \sqrt{1-x} \quad &\iff \quad y^2 = 1 - x \\ &\iff \quad x = 1 - y^2. \end{aligned}$$

Tomango $x = 1 - y^2$, obtenemos $f(x) = y$. Por lo tanto, probamos que es epiyectiva. Entonces es biyectiva. Su inversa es la función

$$\begin{aligned} h \, : \, \mathbb{R}_{\geq 0} \quad &\longrightarrow \quad (-\infty, 1] \\ y \quad &\longmapsto \quad h(y) = 1 - y^2. \end{aligned}$$

Composición de Funciones

Recordemos que, en general, si A, B y C son conjuntos de naturaleza arbitraria y f, g son funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces se define la composición de f y g como la función $g \circ f$ definida por $g \circ f : A \to C$ tal que $(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

En nuestro caso, dadas dos funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no siempre se cumple que $\text{Im}\ (f) \subseteq B$, luego la definición de la composición no siempre se puede hacer por este camino.

En consecuencia definiremos la composición simplemente mediante la ley, como se hace frecuentemente con las funciones reales de variable real, es decir

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

de modo que el dominio será

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$

Ejemplo 6.7.
Definamos $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \sqrt{x}$. Notemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por lo tanto, el dominio de la función $g \circ f(x) = \sqrt{1-x}$ será

$$\text{Dom}\,(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, 1 - x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = (-\infty, 1].$$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ Toda cónica en $\mathbb{R}^2$ puede ser representada por una función real de variable real.

2. $\square$ Cualquier par de funciones de dominios distintos tienen imágenes distintas.

3. $\square$ Para una función f impar, $-f$ es impar.

4. $\square$ Cualquier función estrictamente creciente siempre es impar.

5. $\square$ Si el Dominio de una función es acotado inferior o superiormente, la Imagen de dicha función es acotada inferior o superiormente.

6. $\square$ El máximo de una función real f es igual al mínimo de $-f$.

7. $\square$ La suma de dos funciones pares es par.

8. $\square$ La suma de dos funciones impares es impar.

9. $\square$ La suma de una funcion par con una impar es impar.

10. $\square$ El producto de funciones impares es impar.

11. $\square$ La restricción de una función acotada es acotada.

12. $\square$ El dominio de cualquier composición de funciones es siempre acotado.

13. $\square$ La suma de funciones crecientes es creciente.

14. $\square$ La composición de funciones crecientes es creciente.

15. $\square$ Si f es par entonces $g \circ f$ es par.

16. $\square$ La composición de f con su inversa (cuando existe) da la función identidad.

17. $\square$ Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.

18. $\square$ Si f es epiyectiva entonces $g \circ f$ es epiyectiva.

19. $\square$ Si f^{-1} no es impar entonces f tampoco lo es.

20. $\square$ La división de dos funciones constantes cualesquiera, es también una función constante.

21. $\square$ Si $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, entonces el dominio más grande posible de f consiste de todos los números reales excepto el 0.

22. $\square$ Una función inyectiva posee a lo más un cero.

23. $\square$ Una función epiyectiva definida en todo $\mathbb{R}$ posee al menos un cero.

24. $\square$ La función $f(x) = \dfrac{x+1}{1-|x|}$ no posee ceros.

25. $\square$ La función $f(x) = \dfrac{x+1}{1-|x|}$ es impar.

26. $\square$ La función $f(x) = \dfrac{x+1}{1-|x|}$, restringida a $(-\infty, 1)$ es constante.

27. $\square$ La función $f(x) = \dfrac{x+1}{1-|x|}$ es acotada.

28. $\square$ La función $f(x) = \dfrac{x+1}{1-|x|}$, $-f$ no es inyectiva.

29. $\square$ La función $f(x) = (x^2-4)\sqrt{1-x^2}$ posee dominio acotado.

30. $\square$ La función $f(x) = (x^2-4)\sqrt{1-x^2}$ es par.

31. $\square$ La función $f(x) = (x^2-4)\sqrt{1-x^2}$ es epiyectiva.

32. $\square$ Existe un subconjunto B del dominio de la función $f(x) = (x^2-4)\sqrt{1-x^2}$, tal que $f(x) > 0 \quad \forall x \in B$.

33. $\square$ La suma de funciones epiyectivas es epiyectiva.

34. $\square$ El producto de funciones inyectivas es una función inyectiva.

35. $\square$ Si una función es estrictamente creciente o decreciente, entonces es inyectiva.

36. $\square$ Si g es positiva ($g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(g)$), entonces $g \circ f$ tambien lo es.

37. $\square$ Si una función f es (estrictamente) creciente y estrictamente positiva ($f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$), entonces $\dfrac{1}{f}$ es (estrictamente) decreciente.

38. $\square$ El gráfico de una función f nunca se intersecta con el gráfico de f^{-1}.

39. $\square$ La inversa de una función polinómica es una función polinómica.

40. $\square$ Los ceros de $f+g$ son los ceros de f intersecados con los ceros de g.

41. $\square$ Los ceros de fg son los ceros de f unión con los ceros de g.

42. $\square$ Si la restricción $f|_B$ de una función f es par, entonces f es también impar.

43. $\square$ La función módulo de toda función acotada inferiormente es acotada.

44. $\square$ Los ceros de $|f|$ son los mismos ceros de f.

45. ☐ El gráfico de la composición de dos funciones f y g cualesquiera $g \circ f$ es el gráfico de g desplazado con respecto al origen.

46. ☐ Una función periódica no puede ser invertible.

47. ☐ La composición de dos funciones polinómicas es una función polinómica.

48. ☐ Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante nunca es inyectiva.

49. ☐ Toda función polinómica posee ceros.

50. ☐ Toda línea en el plano es representable por una función inyectiva.

51. ☐ Una función acotada superiormente no puede ser estrictamente creciente.

Guía de Ejercicios

(1) Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$. Encuentra dominio, imagen y ceros para

(a) $c = r = 0$, $a = p = 1$, $b = -q = 1$.

(b) $a = p = c = -q = 1$, $b = 2$.

(c) $a = r = 2$, $e = 0$, $b = -c = d = 1$.

(d) $a = 3$, $b = 2$, $c = p = 1$, $q = 0$, $r = 5$.

(e) $a = 0$, $b = q = 1$, $c = p = 2$, $r = 3$.

(2) Para las siguientes funciones, encuentre dominio, ceros, crecimiento, paridad, inyectividad y acotamiento:

(a) $f(x) = x^3$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{|2x + 1|}$.

(3) Verifica que si las siguientes funciones son pares, estrictamente crecientes o inyectivas:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)(x + 1)}$.

(c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{1 + x^4}$.

(d) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

(e) $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 1}$.

(4) Sea $f(x) = 6x^2 - x - 5$ Determine la paridad, ceros , crecimiento e inyectivad de las siguientes funciones:

(a) $g(x) = f(f(x))$.

(b) $g(x) = f(x + 1)$.

(c) $g(x) = f(|x|)$.

(d) $g(x) = |f(x - 1)|$.

(e) $g(x) = f(f(x + 1) - f(|x|))$.

(5) Considere la asignación $f(x) = \begin{cases} (-1)^{1+|x|}\sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leq x \leq 0, \\ \dfrac{x-1}{|x|-1}, & si \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{|2x-1|}, & si \quad x < -1 \quad o \quad x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

(a) Encuentre el dominio de la asignación.

(b) Estudie el crecimiento.

(c) Estudie la paridad.

(d) Encuentre ceros e intersección con el eje OY.

(e) Bosqueje un gráfico.

(6) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$.

(a) Muestre que f no es inyectiva.

(b) Calcule $f^{-1}([-1, 1])$.

(c) Sea $g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que g es inyectiva.

(d) Restringe el recorrido de modo de obtener a partir de g una función biyectiva.

(e) Calcule la inversa.

(7) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$.

(a) Pruebe que $f(0) = 0$ y que $f(1) = 1$.

(b) Calcule $f(x)$, para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y por último para $x \in \mathbb{Q}$.

(c) Pruebe que $x \geq 0$ implica que $f(x) \geq 0$. Deduzca que f es estrictamente creciente.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$.

- **(a)** (10 min.) Determine $A = \text{Dom } f$, recorrido y paridad.
- **(b)** (10 min.) Encuentre los ceros y signos de f.
- **(c)** (10 min.) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- **(d)** (10 min.) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- **(e)** (10 min.) Determine el mayor conjunto B, $B \subseteq A = \text{Dom}(f)$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.
- **(f)** (10 min.) Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$.

P2. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

- **(a)** (10 min.) Encuentre su dominio A, ceros y signos.
- **(b)** (10 min.) Pruebe que f es inyectiva.
- **(c)** (10 min.) Demuestre que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- **(d)** (10 min.) Encuentre la función inversa de $f : A \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y explicite su dominio y recorrido.

P3. Sea la fórmula $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{1+x}}$.

- **(a)** (10 min.) Determine el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \to \mathbb{R}$ que a x le asocia $f(x)$, sea una función.
- **(b)** (5 min.) Encuentre los ceros de f y determine sus signos.
- **(c)** (5 min.) Determine la paridad y periodicidad de f.
- **(d)** (5 min.) Determine la inyectividad y epiyectividad de f.
- **(e)** (10 min.) Encuentre los intervalos donde f crece y aquellos donde f decrece.
- **(f)** (5 min.) Grafique f.

P4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & si \quad x \geq 0 \\ x + \beta & si \quad x < 0 \end{cases}$.

- **(a)** (10 min.) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.

(b) (10 min.) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) (10 min.) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tal que f es biyectiva$\}$?

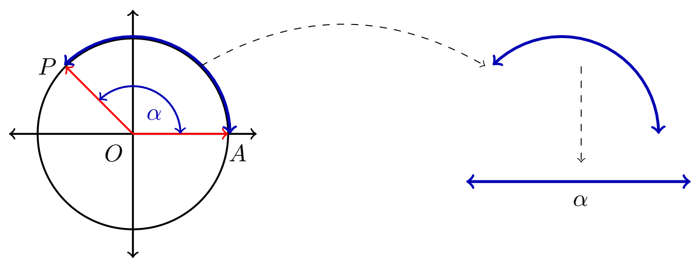
P5. (15 min.) Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x & si & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$. Pruebe que pada todo $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq |x|$.

SEMANA 7:

Trigonometría

7.1 Medida de ángulos en radianes

Consideremos la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de la figura.



Definición (Ángulo positivo) Dado un punto P en la circunferencia, llamaremos ángulo positivo AOP al ángulo en el que hay que rotar el rayo OA, en el sentido contrario de los punteros del reloj, para obtener el rayo OP.

La medida de este ángulo **en radianes** será el largo del arco de circunferencia que va desde A hasta P, moviéndose en el sentido contrario a los punteros del reloj.

Diremos que el punto P se obtiene de **rotar en el ángulo positivo** AOP **el punto** A.

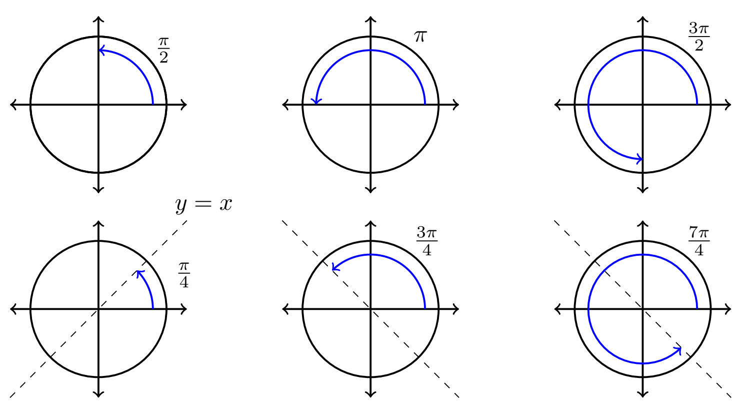


Figura 17: Algunos ángulos positivos

> **Definición (Ángulo negativo)** Llamaremos **ángulo negativo** AOP al ángulo en el que hay que rotar el rayo OA, en el sentido de los punteros del reloj, para obtener el rayo OP.

La medida de este ángulo **en radianes** será el inverso aditivo del largo del arco de circunferencia que va desde A hasta P, moviéndose en el sentido de los punteros del reloj.

Diremos que el punto P se obtiene de **rotar en el ángulo negativo** AOP **el punto** A. Llamaremos 2π el largo de la circunferencia de radio 1.

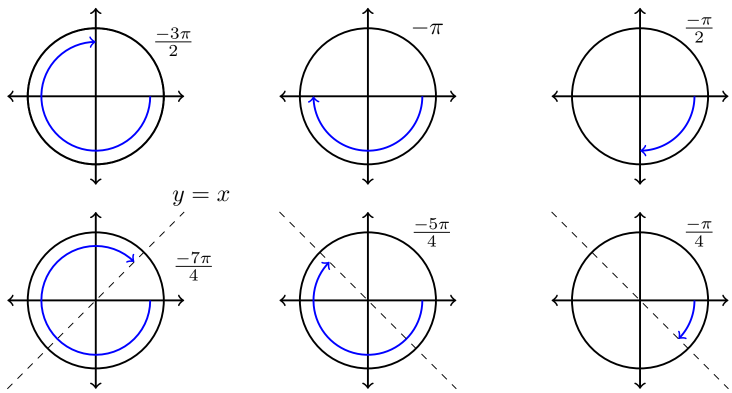


Figura 18: Algunos ángulos negativos

- Cuando un ángulo da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en el sentido contrario de los punteros del reloj y luego gira un ángulo positivo AOP su medida en radianes es $2k\pi + x$, donde x es la medida del ángulo positivo AOP.
- Del mismo modo, un ángulo que da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en el sentido de los punteros del reloj y luego gira un ángulo negativo AOP, tiene como medida $-2k\pi + x$, donde x es la medida del ángulo negativo AOP (ver Figura 5.3).

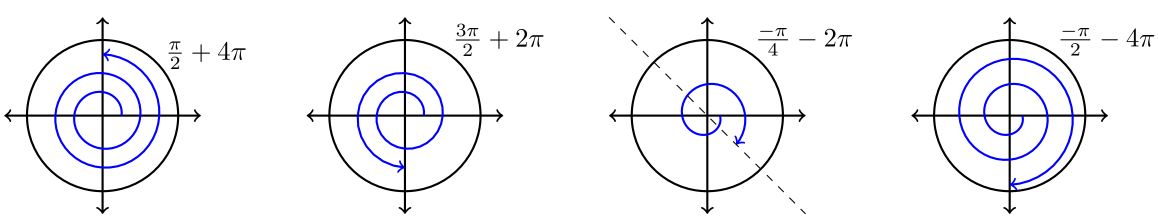


Figura 19: Medida de ángulos en radianes

En general, si la medida en radianes x de un ángulo es positiva, se entenderá que el ángulo se obtiene al dar vueltas en el **sentido contrario** a los punteros del reloj y, si x es negativo, se entenderá que el angulo se abtiene al dar vueltas **en el sentido** de los punteros del reloj. Esta forma de medir ángulos establece una biyección entre ángulos y los números reales.

7.2 Funciones trigonométricas

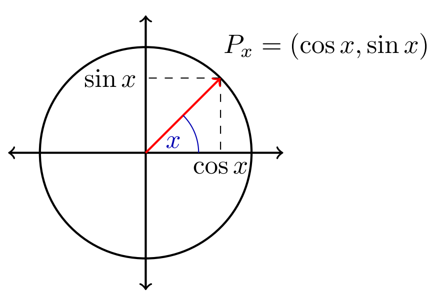
¿A qué nos referimos cuando decimos que se puede establecer una *biyección entre ángulos y reales*?

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x , partiendo desde el punto $(1,0)$. Entonces, si $x > 0$, estaremos rotando en el sentido contrario a los punteros del reloj y, si $x < 0$, lo estaremos haciendo en el sentido de los punteros del reloj.

Usando P_x definiremos las funciones trigonométricas **seno** y **coseno**.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN COSENO) Definimos la función **coseno** ($\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) como aquella que a cada x le asocia la abscisa del punto P_x.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN SENO) La función **seno** ($\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) queda definida como aquella que a cada x asocia la ordenada del punto P_x.



De la definición de las funciones seno y coseno, se deduce que ellas satisfacen la así llamada Identidad Trigonométrica Fundamental:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Las siguientes aseveraciones acerca de las funciones trigonométricas pueden justificarse fácilmente y quedan como ejercicio.

Propiedad 7.1 (Función coseno).

(1) *Es una función par. Por lo tanto, bastará con conocerla en $I = [0, \pi]$ para tener su comportamiento global.*

(2) *Tiene un cero en $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que $\cos^{-1}(\{0\}) = \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

(3) *En* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *es positiva y es negativa en* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(4) *Decrece en* $[0, \pi]$.

Propiedad 7.2 (Función seno).

(1) *Es una función impar. Por lo tanto, bastará con conocerla en* $I = [0, \pi]$ *para tener su comportamiento global.*

(2) *Tiene un cero en* $x = 0$ *y otro en* $x = \pi$. *Luego,* $sen^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) *En* $I = [0, \pi]$ *es siempre positiva.*

(4) *Crece en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *y decrece en* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Veamos en el gráfico de las funciones seno y coseno (Figura 20) las propiedades anteriores.

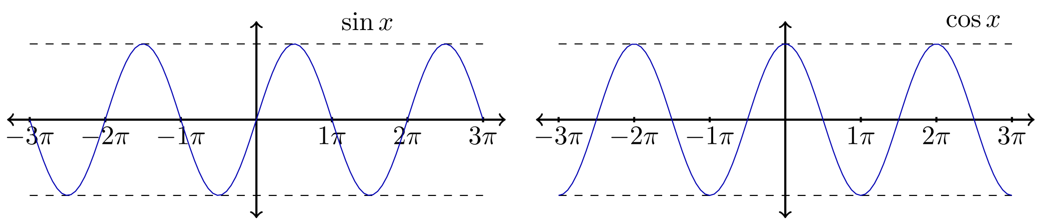


Figura 20: Gráfico de la función seno (izquierda) y coseno (derecha).

Otra función importante es:

Definición (Función tangente) Se define la función **tangente** por $\tan : A \to \mathbb{R}$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\}$ que a x asocia $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Propiedad 7.3 (Función Tangente).

(1) *Sus ceros son los ceros de la función sen.*

(2) *Es una función impar.*

(3) *Es positiva en el intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(4) *Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma* $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Veamos en el gráfico de la función tangente (Figura 21) las propiedades mencionadas.

Observación: La cantidad $\tan(x)$ corresponde a la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto P_x asociado, como vemos en la Figura 22.

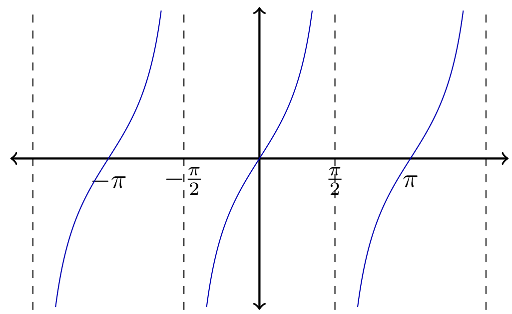


Figura 21: Gráfico de la función tangente.

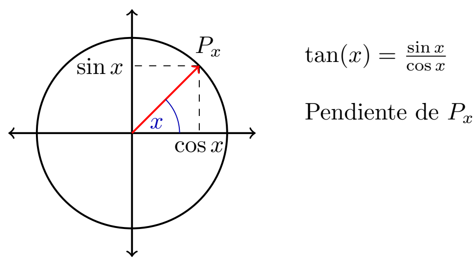


Figura 22: Tangente como pendiente de la recta $\overline{OP_x}$.

7.3 Funciones Periódicas

Al observar los gráficos de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, podemos ver que sus comportamientos son cíclicos, los valores de las funciones se repiten después de cierto período.

Definición (Funciones periódicas) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *periódica* si y sólo si existe $p \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

(1) $(\forall x \in A)\ x + p \in A$.

(2) $(\forall x \in A)\ f(x + p) = f(x)$.

En este caso, p se llama *período* de la función.

Notemos que las funciones seno, coseno y tangente son periódicas. En efecto, sabemos que dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x. Se tiene que $P_x = P_{x+2\pi}$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Por lo tanto, podemos enunciar la siguiente propiedad:

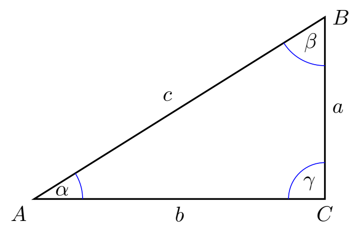
Propiedad 7.4.

(1) *Las funciones seno y coseno son periódicas con período* 2π.

(2) *La función tangente es periódica con período π.*

7.4 Trigonometría del triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (el vértice A en el origen y rectángulo en C), de lados a, b y c, opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, y ángulos interiores α, β y γ como el de la figura:



Se tiene que:

Teorema 7.1. *En un triángulo rectángulo se satisface que*

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \ \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} \quad y \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \ .$$

Demostración. Observemos la Figura 23. La pendiente de la recta que pasa por los

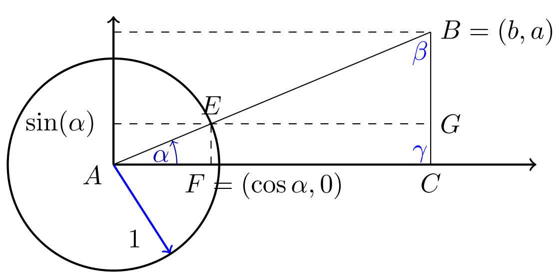


Figura 23: Figura auxiliar para la prueba del Teorema 7.1

puntos $A = (0, 0)$ y $B = (b, a)$ es $\dfrac{a-0}{b-0} = \dfrac{a}{b}$.

Por otro lado, en el triángulo ΔAEF, el lado AE es de tamaño 1, de modo que $d(A, F) = \cos(\alpha)$, $d(E, F) = \operatorname{sen}(\alpha)$ y, en particular, $E = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$. Esto implica que la pendiente de la recta $\overline{AE}$ es $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$. Por lo tanto, como las pendientes de las rectas $\overline{AE}$ y $\overline{AB}$ son iguales, tenemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

Entonces, el triángulo ΔEBG tiene sus lados iguales a

$$|\overline{EB}| = c - 1, \quad |\overline{EG}| = b - \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad |\overline{BG}| = a - \operatorname{sen}(\alpha).$$

Por lo tanto, como ΔEBG es un triángulo rectángulo, por el Teorema de Pitágoras,

$$(a - \operatorname{sen}(\alpha))^2 + (b - \cos(\alpha))^2 = (c-1)^2.$$

Desarrollando los cuadrados y reordenando términos,

$$a^2 + b^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 2a\operatorname{sen}(\alpha) - 2b\cos(\alpha) = c^2 + 1 - 2c.$$

Aplicando que $a^2 + b^2 = c^2$ (también consecuencia del Teorema de Pitágoras porque ΔABC es un triángulo rectángulo) y que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, se obtiene que

$$-2\operatorname{sen}(\alpha)\, a - 2\cos(\alpha)\, b = -2c.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{sen}(\alpha)\, a + \cos(\alpha)\, b = c. \tag{7.1}$$

Sabemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{b}\cos(\alpha).$$

Reemplazando esto en la ecuación anterior, podemos despejar $\cos(\alpha)$:

$$\cos(\alpha)\left(b + \frac{a^2}{b}\right) = c \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha)\frac{b^2 + a^2}{b} = c \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{cb}{b^2 + a^2} = \frac{cb}{c^2} = \frac{b}{c}.$$

Luego, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$. Finalmente, para concluir que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$, reemplazamos $\cos(\alpha) = \frac{b}{a}\operatorname{sen}(\alpha)$ en la ecuación (7.1) y se despeja $\operatorname{sen}(\alpha)$. □

El Teorema 7.1 es muy útil para calcular valores de seno, coseno y tangente, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1.
Consideremos el ángulo $\frac{\pi}{4}$ y el triángulo ΔABC como en la Figura 24. Como el ángulo correspondiente al vértice B es recto, entonces la suma de los otros dos ángulos tiene que ser $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, es un triángulo isósceles. En partiuclar, esto implica que $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$. Por el Teorema 7.1,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = 1.$$

Como

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}|\overline{AC}| = \sqrt{2}|\overline{BC}| = |\overline{AB}|.$$

Por el Teorema 7.1,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

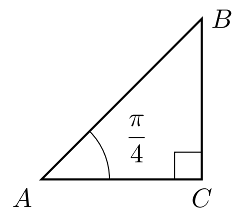


Figura 24: Figura auxiliar para calcular $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

7.5 Funciones recíprocas

Además, se definen las funciones **cotangente**, **secante** y **cosecante** de la siguiente manera:

DEFINICIÓN (FUNCIONES RECÍPROCAS) Se definen:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$
$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Algunas propiedades:

Propiedad 7.5.

(1) *Si* $\cos x \neq 0$*, entonces* $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$*. Esto se obtiene al dividir la identidad fundamental por* $\cos^2 x$*.*

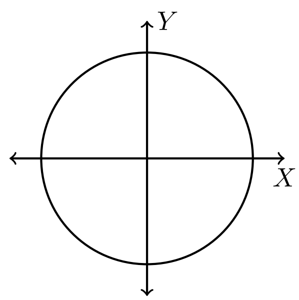
(2) *Si* $\operatorname{sen} x \neq 0$ *, entonces* $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cotan}^2 x$*. Esto se obtiene al dividir la identidad fundamental por* $\operatorname{sen}^2 x$*.*

Inscribiendo apropiadamente triángulos rectángulos isósceles o equiláteros en el círculo unitario se puede obtener la siguiente tabla de valores:

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x
0	0	1	0	-	1	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	1	$-$	1
π	0	-1	0	$-$	-1	$-$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$	0	$-$	-1

7.6 Independencia de sistemas de coordenadas

Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano (ver Figura 25). El primero $\{OXY\}$ es el típico, donde el eje OX es horizontal y el eje OY es vertical. El segundo $\{O'X'Y'\}$ tiene origen en $O' = O$ y los ejes $O'X'$ y $O'Y'$ forman un ángulo α con respecto a los ejes OX y OY respectivamente. Se dice que $\{O'X'Y'\}$ corresponde a una rotación del sistema $\{OXY\}$ en un ángulo α.



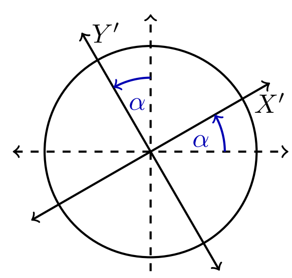


Figura 25: Sistemas de coordenadas $\{OXY\}$ (izquierda) y $\{O'X'Y'\}$ (derecha).

Tracemos una circunferencia unitaria $\odot$ con centro en O y consideremos dos puntos P y Q en $\odot$ de modo tal que $\angle POX = \alpha$ y $\angle QOX = \beta$. Con esto, calculemos la distancia $|\overline{PQ}|$ en ambos sistemas:

En el sistema OXY, $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Luego:

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^2 =& [\cos\beta - \cos\alpha]^2 + [\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha]^2 \\ =& \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha \\ & + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \\ =& 2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

En el sistema $O'X'Y'$, $P=(1,0)$, $Q=(\cos(\beta-\alpha),\operatorname{sen}(\beta-\alpha))$. Luego:

$$\begin{aligned}|\overline{PQ}|^2 &= [1-\cos(\beta-\alpha)]^2+[0-\operatorname{sen}(\beta-\alpha)]^2\\ &= 1-2\cos(\beta-\alpha)+\cos^2(\beta-\alpha)+\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)\\ &= 2-2\cos(\beta-\alpha).\end{aligned}$$

Como la distancia PQ es independiente del sistema de coordenadas utilizado, podemos escribir que:

$$2-2\cos\beta\cos\alpha-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha=2-2\cos(\beta-\alpha),$$

de donde se deduce que:

Propiedad 7.6 (Diferencia de ángulos en coseno).

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Esta fórmula contiene una tremenda cantidad de información. Dependiendo de los ángulo α y β, vamos a obtener identidades trigonométricas que luego ocuparemos para complementar nuestra demostración en curso.

7.7 Propiedades importantes

La ecuación anterior nos arroja una gran cantidad de información que veremos a continuación.

(1) Evaluando en $\beta=0$ obtenemos $\cos(-\alpha)=\cos 0\cos\alpha+\operatorname{sen}0\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha$. Es decir, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, lo que significa que la función cos es *par.*

(2) Evaluando $\alpha=\pi/2$, obtenemos $\cos(\beta-\pi/2)=\cos\beta\cos\pi/2+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\pi/2=\operatorname{sen}\beta$. Es decir,

$$\cos(\beta-\pi/2)=\operatorname{sen}\beta.$$

(3) Llamemos $\gamma=\beta+\pi/2$. Ocupando lo anterior, $\cos(\beta-\pi/2)=\operatorname{sen}\beta$ y evaluando β por γ tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\gamma-\pi/2)&=\operatorname{sen}\gamma,\\ \cos\beta&=\operatorname{sen}(\beta+\pi/2).\end{aligned}$$

(4) Evaluemos ahora en $\alpha=-\pi/2$. Con esto, obtenemos

$$\cos(\beta+\pi/2)=\cos(\beta-(-\pi/2))=\cos\beta\cos(-\pi/2)+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(-\pi/2)=-\operatorname{sen}\beta.$$

Es decir,

$$\cos(\beta+\pi/2)=-\operatorname{sen}\beta.$$

(5) Como $\cos(\beta + \pi/2) = -\operatorname{sen}\beta$, llamamos $\gamma = \beta - \pi/2$. Reemplazando β por γ, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma + \pi/2) &= -\operatorname{sen}\gamma, \\ \cos\beta &= -\operatorname{sen}(\beta - \pi/2), \\ -\cos\beta &= \operatorname{sen}(\beta - \pi/2). \end{aligned}$$

(6) Ahora veamos un pequeño truco, analicemos la paridad de sen:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= \operatorname{sen}(-\alpha + \pi/2 - \pi/2), \\ &= \operatorname{sen}((-\alpha + \pi/2) - \pi/2), \\ &= -\cos(-\alpha + \pi/2), && \text{usando la propiedad recién vista,} \\ &= -\cos(\alpha - \pi/2), && \text{por paridad de cos tenemos,} \\ &= -\operatorname{sen}\alpha, && \text{por la segunda propiedad} \end{aligned}$$

En consecuencia, sen es impar.

(7) La función tan, al ser el cociente entre una función par y otra impar, es fácil ver que esta es impar:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha.$$

7.8 Suma y resta de ángulos

Regresando a nuestra demostración anterior, sabemos que

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Además, poniendo $-\alpha$ en lugar de α, se obtiene la siguiente propiedad:

Propiedad 7.7 (Suma de ángulos en coseno).

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\beta + \alpha) &= \cos(\pi/2 - (\beta + \alpha)) \\ &= \cos((\pi/2 - \beta) - \alpha) \\ &= \cos(\pi/2 - \beta)\cos\alpha + \operatorname{sen}(\pi/2 - \beta)\operatorname{sen}\alpha \\ &= \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Con lo cual, tenemos:

Propiedad 7.8 (Suma de ángulos en seno).

$$\operatorname{sen}(\beta+\alpha)=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha+\cos\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Finalmente, poniendo $-\alpha$ en lugar de α, se obtiene:

Propiedad 7.9 (Diferencia de ángulos en seno).

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\cos\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

Regla de los cuadrantes.
Ahora que sabemos calcular $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)$ y $\cos(\alpha\pm\beta)$, veamos qué sucede cuando se le otorga el valor de 2π a uno de estos ángulos. Sabemos que $\operatorname{sen}(2\pi)=0$ y que $\cos(2\pi)=1$, por lo tanto:

- $\operatorname{sen}(2\pi+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$,
- $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

Ya vimos qué sucede cuando uno de los ángulos es 2π, lo que significa dar una vuelta completa. Ahora analizaremos qué sucede cuando deseamos un cambio de cuadrante, es decir, sumarle π o bien $\pi/2$:

- $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$,
- $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$,
- $\cos(\pi/2-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$,
- $\cos(\pi/2+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \quad$ y $\quad \operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha$.

7.9 Identidades útiles

Otras identidades bastante útiles que se desprenden directamente de la suma y resta de ángulos en las funciones sen y cos son las siguientes:

Propiedad 7.10. *Se cumplen las siguientes identidades trigonométricas:*

(1) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$.

(2) $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$.

(3) $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$.

(4) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x.$

(5) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad y \qquad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x).$

(6) $\left|\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos x)} \qquad y \qquad \left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos x)}.$

(7) $\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad \tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \qquad y \qquad \tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$

(8) $\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right).$

(9) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right).$

(10) $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right).$

(11) $\tan x \pm \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$

De manera más general, definimos la *co-función* de una función trigonométrica de la siguiente manera:

> DEFINICIÓN (CO-FUNCIÓN) Una **co-función** es una función trigonométrica que está relacionada con otra mediante la complementariedad de los ángulos. Es decir, dos funciones trigonométricas f y g se llaman **co-funciones** si cumplen una relaciones de la forma
> $$f(\theta) = g\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right).$$

Ejemplos de co-funciones:

- $f = \operatorname{sen} \implies cof = \cos.$
- $f = \cos \implies cof = \operatorname{sen}.$
- $f = \tan \implies cof = \cot.$
- $f = \cot \implies cof = \tan.$
- $f = \sec \implies cof = \csc.$
- $f = \csc \implies cof = \sec.$

Ahora, cada vez que se desee calcular una función Trigonométrica en un ángulo α de la forma $\alpha = \Omega \pm \varphi$ donde $\Omega = \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \pm(2\pi + \pi/2), \ldots$, es decir, ángulos que representan a puntos sobre los ejes, se obtiene lo siguiente:

$$f(\Omega \pm \varphi) = \begin{cases} s \cdot \varphi & \text{si } \Omega \text{ representa a un punto ubicado en el eje de las } X. \\ s \cdot cof(\varphi) & \text{si } \Omega \text{ representa a un punto ubicado en el eje de las } Y. \end{cases}$$

Donde s representa el signo que debe anteponerse, el cual se obtiene graficando el ángulo $\Omega \pm \varphi$ suponiendo que φ esta entre 0 y $\pi/2$, y mirando en el círculo trigonométrico el signo de la función f correspondiente al cuadrante.

Ejemplo 7.2.

$$\begin{aligned} \tan(-5\pi/2 + \pi/6) &= -\cot(\pi/6) \\ \sec(3\pi - \alpha) &= -\sec(\alpha) \end{aligned}$$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ El coseno del ángulo $\alpha = 180^o$ es igual al de $\beta = 540^o$.

2. $\square$ Un radián son 180^o.

3. $\square$ 2π radianes son 180^o.

4. $\square$ La siguiente ecuación es cierta $\cos(180^o + 20^o + 160^o) = 1$.

5. $\square$ La siguiente ecuación es cierta $\cos\left(3\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

6. $\square$ La siguiente ecuación es cierta $\pi - 2\pi = \dfrac{3\pi}{2}$

7. $\square$ Siempre dos ángulos medidos en radianes son iguales si su cuociente es una constante fija.

8. $\square$ Siempre dos ángulos medidos en radianes son iguales si diferencia es una constante fija.

9. $\square$ Siempre dos ángulos medidos en radianes tienen el mismo coseno si su diferencia es múltiplo de 2π.

10. $\square$ En una circunferencia de radio 1, un ángulo α subtiende un arco de largo α.

11. $\square$ En una circunferencia de radio $R \neq 1$, un ángulo α subtiende un arco de largo $\dfrac{\alpha}{R}$.

12. $\square$ En una circunferencia de radio $R \neq 1$, un ángulo α subtiende un arco de largo $R\alpha$.

13. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, siempre se cumple que $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = |\overline{AC}|$.

14. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$.

15. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\cos\alpha = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$.

16. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\tan\alpha = \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$.

17. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\cos\alpha = \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$.

18. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$.

19. $\square$ Sea ΔABC rectángulo en B, con α el ángulo asociado al vértice A se cumple que $\cos\alpha = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}$.

20. $\square$ Si conocemos un lado en un triángulo rectángulo y su hipotenusa, podemos calcular $\cos\alpha, \cos\beta, \operatorname{sen}\gamma$, siendo α, β, γ los ángulos interiores del triángulo.

21. $\square$ Si conocemos un lado en un triángulo rectángulo y su hipotenusa, podemos calcular $\tan\alpha, \tan\beta$, siendo α, β los ángulos interiores no rectos del triángulo.

22. $\square$ Si conocemos un lado en un triángulo rectángulo y su hipotenusa, podemos calcular $\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\beta, \operatorname{sen}\gamma$, siendo α, β, γ los ángulos interiores del triángulo.

23. $\square$ $\forall\epsilon > 0, \forall M > 0, \exists\alpha > M$, tal que $\operatorname{sen}\alpha < \epsilon$.

24. $\square$ $\forall\epsilon > 0, \forall M > 0, \exists\alpha > M$, tal que $\cos\alpha < \epsilon$.

25. $\square$ $\forall\epsilon, \forall M > 0, \exists\alpha > M$, tal que $\tan\alpha < \epsilon$.

26. $\square$ $\forall\alpha, \beta$ si $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

27. $\square$ $\forall\alpha, \beta$ si $\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

28. $\square$ $\forall M > 0, \exists\alpha$ tal que $\operatorname{sen}\alpha > M$.

29. $\square$ $\forall M > 0, \exists\alpha$ tal que $\cos\alpha > M$.

30. $\square$ $\forall M > 0, \exists\alpha$ tal que $\tan\alpha > M$.

31. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha$ se tiene que $\operatorname{sen}\alpha < M$.

32. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha$ se tiene que $\cos\alpha < M$.

33. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha$ se tiene que $\tan\alpha < M$.

34. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha, \beta$ se tiene que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta < M$.

35. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha, \beta$ se tiene que $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta < M$.

36. $\square$ $\exists M > 0$ tal que $\forall\alpha, \beta$ se tiene que $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < M$.

37. $\square$ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = y$.

38. $\square$ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = y$.

39. $\square$ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tan x = y$.

40. $\square$ $\exists \alpha$ tal que $\operatorname{sen} \alpha > \cos \alpha$, $\operatorname{sen}(\alpha + \pi) > \cos(\alpha + \pi)$.

41. $\square$ $\exists \alpha$ tal que $\operatorname{sen} \alpha > \cos \alpha$, $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

42. $\square$ $\forall \alpha$, siempre $\tan \alpha \geq \operatorname{sen} \alpha$.

43. $\square$ $\forall \alpha$, siempre $\tan \alpha \geq \cos \alpha$.

44. $\square$ $\operatorname{sen} \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$.

45. $\square$ $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha > 0$.

46. $\square$ Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$.

47. $\square$ Si $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha \neq 0$.

48. $\square$ Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha \neq 0$.

49. $\square$ $\forall \alpha, \beta$, si $\operatorname{sen} \alpha > \operatorname{sen} \beta$, entonces $\alpha > \beta$.

50. $\square$ $\forall \alpha, \beta$, si $\cos \alpha > \cos \beta$, entonces $\alpha > \beta$.

51. $\square$ $\forall \alpha, \beta$, si $\tan \alpha > \tan \beta$, entonces $\alpha > \beta$.

52. $\square$ No necesariamente se cumple que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos \alpha = 1$.

53. $\square$ No necesariamente se cumple que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Guía de Ejercicios

Observación: En esta guía se utiliza la notación csc = cosec.

(1) **(a)** Escriba, de 3 formas distintas, los siguientes ángulos en radianes:
30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 120^o, 150^o, 180^o, 240^o, 270^o, 300^o, 360^o.

(b) Escriba en grados los siguientes radianes: π, 3π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

(2) Indique para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes igualdades:

(a) $\operatorname{sen} x \cos x = 0$.

(b) $\cos x \tan x = 0$.

(c) $\operatorname{sen} x = \cos x$.

(d) $\operatorname{sen} x(1 - \cos x) = 0$.

(3) Dado un triángulo ABC, rectángulo en B con $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$.

(a) Determine el valor de $\overline{AC}$.

(b) Si α es el ángulo asociado al vértice A, calcule $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

(c) Si β es el ángulo asociado al vértice C, calcule $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

(d) Verifique en este caso que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

(e) Verifique que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ y que $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$.

(f) Calcule $\tan\alpha$ y $\tan\beta$.

(4) Calcule:

(a) $(\operatorname{sen}(\pi/6) + \cos(\pi/6))(\operatorname{sen}(\pi/3) - \cos(\pi/3))\sec(\pi/4)$.

(b) $\frac{1}{2}\cos(\pi/3) + 2\csc^2(\pi/6)$.

(c) $\cot^2(\pi/6) + 4\cos^2(\pi/4) + 3\sec^2(\pi/6)$.

(d) $3\tan^2(\pi/6) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2(\pi/3) - \frac{1}{2}\csc^2(\pi/4) + \frac{4}{3}\cos^2(\pi/6)$.

(5) Usando el hecho que $\forall x, \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, pruebe las siguientes identidades:

(a) $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

(b) $\tan^2 x + 1 = \sec^2$.

(c) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$. *Indicación*: Recuerde que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

(d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

(e) $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$. *Indicación*: Recuerde que $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

(f) $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

(6) Pruebe las siguientes identidades

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{tanx}{cotx} + \dfrac{\sec x}{\csc x} = \dfrac{2\cot x + 1}{(\cot x)^2}$.

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha} + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1$.

(c) Suponiendo que $\tan \alpha = \dfrac{a}{b}$, pruebe que $a(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2b \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = a$.

(d) $(\operatorname{sen} \alpha - \csc \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sec \alpha)^2 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 1$.

(7) Pruebe las siguientes identidades

(a) $\operatorname{sen}^2 x \tan x + \cos^2 x \cot x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = \tan x + \cot x$.

(b) $\tan x + \cot x = \sec x \operatorname{cosec} x$.

(c) $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$.

(d) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

(e) $(\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

(f) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{\sec^2 - \sec x \tan x}{\cos^2 x}$.

Guía de Problemas

P1. (30 min.) Considere la función

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}.$$

Encuentre domino, signos, ceros, paridad, periodicidad e inyectividad.

P2. **(a)** (30 min.) Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.

Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

(b) (30 min.) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\operatorname{cotan}(3x) - \operatorname{cotan}(x)} = \operatorname{cotan}(2x).$$

P3. (10 min.) Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \sec^2 \frac{x}{2} + \cos x \tan \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0.$$

P4. Demuestre que $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

(a) (10 min.) $\operatorname{sen} \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\right).$

(b) (10 min.) $\cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\beta + \gamma) + \operatorname{sen}(\beta - \gamma)\right).$

P5. (15 min.) Suponga que usted está parado a una altura h sobre el nivel del mar, mirando al horizonte. Suponga que la Tierra es una circunferencia de radio R. Calcule la cantidad máxima de kilómetros que es posible ver, es decir, el largo del arco de circunferencia que es posible ver.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Trigonometría

8.1 Funciones trigonométricas inversas

Para que una función posea función inversa, esta debe ser primero biyectiva, es decir, epiyectiva e inyectiva a la vez.

Como veremos más adelante, las funciones trigonométricas, al ser periódicas, **no son inyectivas** en $\mathbb{R}$. Es más, si se considera el codomino $\mathbb{R}$, al ser seno y coseno funciones acotadas, tampoco son epiyectivas. Esto deja claro que claro que estas funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\text{sen } &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\\ \cos &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\\ \tan &: \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

no son biyectivas.

A continuación, vamos a redefinir tanto el dominio como el codominio de estas funciones para así lograr biyectividad y poder encontrarles función inversa.

- Consideremos $f(x) = \text{sen}\, x$. Luego, $\text{Im } f(x) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ lo que nos dice que $f(x)$ es una función no epiyectiva.

  Restringimos el codominio a $\text{Cod } f(x) = [-1, 1]$ y, con esto, la función $f(x)$ es epiyectiva.

  Como la función no es inyectiva en $\mathbb{R}$ dado que toma infinitas veces cada valor al ser 2π periódica, vamos a restringir el dominio.

  El dominio que utilizaremos será el intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$ dado que en este intervalo $f(x)$ toma solo un valor para cada x y al mismo tiempo mantenemos la epiyectividad con el codominio restringido anteriormente.

  Así, la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$ es biyectiva y, en consecuencia, posee inversa.

Definición (Arcoseno) Llamamos **arcoseno** a la función inversa de $f(x) = \text{sen}\, x$, es decir:

$$\text{arc sen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

tal que

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \iff x = \operatorname{sen} y$$

- Sea $f(x) = \cos x$. Luego, $\operatorname{Im} f(x) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ y, como vimos anteriormente, muestra no epiyectividad.

  Siguiendo el paso efectuado para sin, restringimos el codominio a $\operatorname{Cod} f(x) = [-1, 1]$ y con esto logramos que la función $f(x)$ sea epiyectiva.

  Al igual que sin, cos es 2π periódica, por lo que no cumple la inyectividad en $\mathbb{R}$. A diferencia del intervalo anterior, esta vez se restringe el dominio al intervalo $[0, +\pi]$, ya que es en este intervalo en el cual $f(x)$ toma sólo un determinado valor para cada x, teniendo así inyectividad.

  Así, la función $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos(x)$ es biyectiva y, en consecuencia, tiene inversa.

DEFINICIÓN (ARCOCOSENO) Llamamos **arcocoseno** a la función inversa de $f(x) = \cos x$, o sea:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

tal que

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

- Sea $f(x) = \tan x$. Luego, $\operatorname{Im}(\tan x) = \mathbb{R}$, por lo que no es necesario restringir el codominio. La función $f(x)$ es epiyectiva.

  Sin embargo, al ser periódica la función tangente, no es inyectiva en $\mathbb{R}$. Luego, se restringe el dominio al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para lograr inyectividad.

  Así, la función $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan(x)$ es biyectiva y, en consecuencia, tiene inversa.

DEFINICIÓN (ARCOTANGENTE) Llamamos **arcotangente** a la función inversa de f, o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

tal que

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

Gráficos

A continuación, veamos los gráficos de estas funciones:

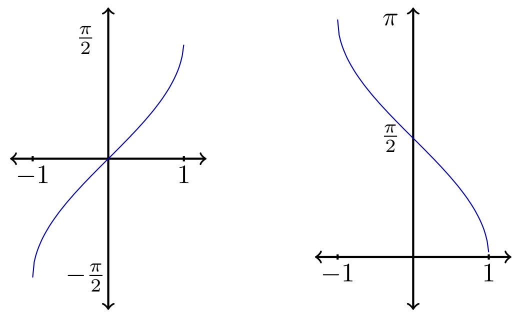


Figura 26: Gráficos de arcoseno y arcocoseno.

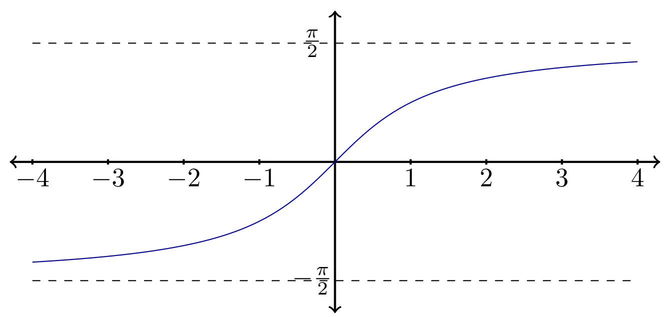


Figura 27: Gráfico de arcotangente.

8.2 Ecuaciones trigonométricas

En esta sección, analizaremos las funciones trigonométricas cuando éstas son utilizadas en ecuaciones y veremos cómo encontrarles solución.

(1) Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

(a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

(b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.

Sin embargo, como la función sen no es epiyectiva, esta solución **no es única**. Por ejemplo, si vemos la Figura 28, podemos ver en azul el gráfico de la función $\operatorname{sen}(x)$ y, en rojo, el gráfico de la recta horizontal $y = a$. Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a$ son todos los puntos donde ambas funciones se intersecan.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de sen.

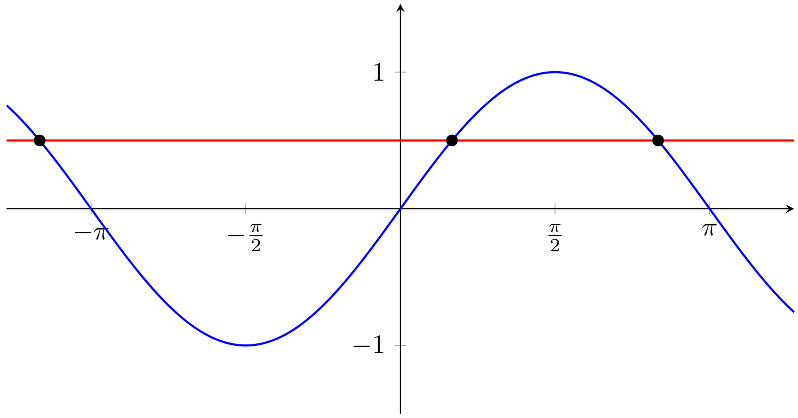


Figura 28: Soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a$.

(2) Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

(a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

(b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo, como la función cos no es epiyectiva, esta solución no es única.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Así, tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de cos.

(3) Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

Sin embargo, como la función tan no es epiyectiva, esta no es la única solución.

La solución general suele escribirse en la ecuación

$$x = k\pi + \alpha, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

A continuación, vamos a ver tres ejemplos concretos de lo anterior:

Ejemplo 8.1.
(1) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$.

(2) $1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0$.

(3) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Mostraremos paso a paso cómo resolver estas ecuaciones trigonométricas. De todas formas, es importante remarcar que, gracias a las identidades trigonométricas que vimos en el capítulo anterior, no hay una única forma de resolver estas ecuaciones.

Solución:

(1) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0 \iff 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x = 0 \iff \cos x[2\operatorname{sen} x + 1] = 0.$

(a) $\cos x = 0 \implies \alpha = \dfrac{\pi}{2} \implies x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $2\operatorname{sen} x + 1 = 0 \iff \operatorname{sen} x = -1/2 \implies \alpha = -\dfrac{\pi}{6}$ Usando la solución que conocemos para la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a$, obtenemos

$$x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La solución, entonces, será

$$x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(2) $1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0,$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2\operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0,\\
&\iff \operatorname{sen} x + \cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0,\\
&\iff [\operatorname{sen} x + \cos x] + 2\cos x[\operatorname{sen} x + \cos x] = 0,\\
&\iff [\operatorname{sen} x + \cos x][1 + 2\cos x] = 0.
\end{aligned}$$

Para que esto se tenga, se debe cumplir alguno de los siguientes:

(a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, esto es,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \cos x = 0 &\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos x = 0,\\
&\implies 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0,\\
&\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Usando la solución de la ecuación $cos(x) = a$, obtenemos

$$x = k\pi + 3\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) $1 + 2\cos x = 0 \iff \cos x = -1/2; \alpha = 2\pi/3$ En otras palabras,

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, la solución de la ecuación

$$1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0$$

es

$$x \in \left\{k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(3) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

$$\begin{aligned}
&\iff \operatorname{sen} x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
&\iff \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = k\pi + (-1)^k \pi/4,\\
&\implies x = k\pi + (-1)^k\pi/4 - \pi/4, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

8.3 Aplicaciones en Triángulos

Teorema del seno

Consideremos un triángulo de lados a, b y c, opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, y ángulos interiores α, β y γ como el de la Figura 29.

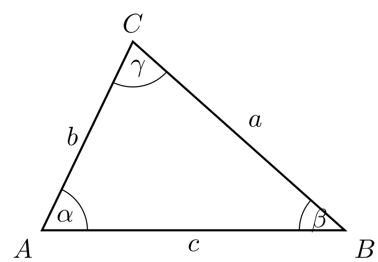


Figura 29: Triángulo ABC.

El siguiente teorema nos revelará la relación que hay entre cada ángulo y su lado opuesto dentro de cualquier triángulo.

Teorema 8.1 (Teorema del Seno). *Para cada triángulo como el de la Figura 29, existe una constante k, tal que*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = k.$$

Demostración. Observemos la Figura 30, de la cual extraeremos bastante información.

Llamemos h a la altura que va desde C hasta la base $\overline{AB}$. Como ya sabemos, por el Teorema 7.1,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}.$$

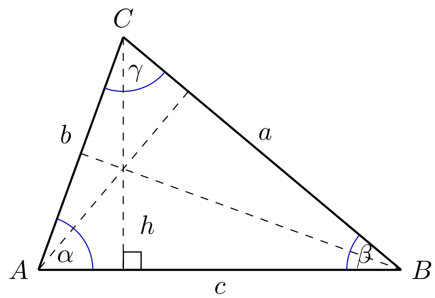


Figura 30: Figura axiliar para demostrar el Teorema del Seno.

En particular, esto nos dice que $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Reemplazando, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \frac{h}{a} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} \\ \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \end{aligned}$$

Si efectuamos el mismo proceso pero esta vez ocupando el ángulo γ, entonces obtenemos la relación

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

□

Teorema del coseno

Este teorema es una expansión del Teorema de Pitágoras, dado que nos permite encontrar una relación entre los lados del triángulo, pero sin que este sea necesariamente triángulo rectángulo.

Otra vez, consideremos un triángulo de lados a, b y c, opuestos a ángulos interiores α, β y γ, como el de la Figura 29. Se cumple la siguiente ley:

Teorema 8.2 (Teorema del Coseno).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Demostración. Observemos la Figura 31.

Primer caso: $\gamma = \pi/2$. Volvemos al caso en el que ABC es rectángulo. Por lo tanto, por el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Como $\cos(\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, tenemos que

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 = c^2.$$

Segundo caso: $\gamma \neq \pi/2$. Para poder usar el Teorema de Pitágoras, trazamos el segmento y perpendicular al segmento $\overline{CB}$, como en la Figura 31. El triángulo formado por los lados y, x, c es rectángulo y por el Teorema 7.1 del triángulo rectángulo, se tiene que

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{y}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{a - x}{b}.$$

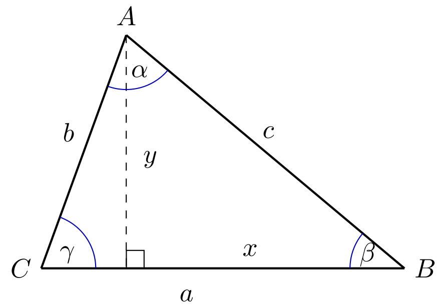


Figura 31: Figura auxiliar para demostrar el Teorema del Coseno.

O sea, despejando x e y tenemos que,

$$y = b \operatorname{sen} \gamma, \quad x = a - b \cos \gamma.$$

Como el triángulo de lados x, y, c es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
c^2 &= x^2 + y^2 \\
&= b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma \\
&= b^2(\operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + a^2 - 2ab \cos \gamma \\
&= b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma, && \text{por Identidad Trigonométrica Fundamental.}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 8.2.

1. Si $\mathcal{L} : y = mx + n$ es la ecuación de una recta, entonces $m = \tan \alpha$ donde α es el ángulo formado entre la recta y en eje OX.

2. Si $\mathcal{L}_1 : y = m_1 x + n_1$ y $\mathcal{L}_2 : y = m_2 x + n_2$ son rectas, entonces el ángulo formado entre las dos rectas puede calcularse por:

   $m_1 = \tan \beta$ y $m_2 = \tan \alpha$

   $\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

2. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

3. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = 2\cos 2\alpha$.

4. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{\cos\alpha - \sec\alpha}$.

5. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\csc\alpha$.

6. $\square$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

7. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

8. $\square$ $\cos\alpha = \tan\alpha\operatorname{sen}\alpha$.

9. $\square$ $\cos\alpha = \tan\alpha\csc\alpha$.

10. $\square$ $\tan\alpha = \dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$.

11. $\square$ $\cos\alpha = \dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

12. $\square$ $\tan\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

13. $\square$ $\sec\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3}{2}\alpha\right)$.

14. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$.

15. $\square$ $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$.

16. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$.

17. $\square$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\tan\alpha\csc\alpha$.

18. $\square$ $\tan\alpha = 3\operatorname{sen}2\alpha - \cos\alpha$.

19. $\square$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$.

20. $\square$ $\cos\alpha = \tan^2\alpha$.

21. $\square$ $\tan\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$.

22. $\square$ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}$.

23. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$.

24. $\square$ $\sec\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

25. $\square$ $\sec\alpha = \dfrac{\csc\alpha}{\cot\alpha}$.

26. $\square$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$.

27. $\square$ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}{\csc\alpha}$.

28. $\square$ $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}$.

29. $\square$ $\cot\alpha = \sqrt{\csc^2\alpha - 1}$.

30. $\square$ $\sec\alpha = \dfrac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}$.

31. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{9}$ es solución de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9} - x\right) = \cos x$.

32. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{9}$ es solución de $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$

33. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ es solución de $2\operatorname{sen} x = 1$.

34. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{6}$ es solución de $2\cos x = \cot x$.

35. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{4}$ es solución de $\csc x = \sec x$.

36. $\square$ $x = 0$ es solución de $3\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 3$.

37. $\square$ $x = \pi$ es solución de $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$.

38. $\square$ $x = 2\pi$ es solución de $\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$.

39. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ es solución de $\cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x$.

40. $\square$ $x = \dfrac{\pi}{4}$ es solución de $\operatorname{sen} x = \cos x$.

41. ☐ El teorema del coseno puede reducirse al teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo.

42. ☐ El teorema del seno puede reducirse al teorema de Pitágoras en un triángulo equilatero.

43. ☐ En el teorema del seno es necesario que uno de los ángulos sea agudo.

44. ☐ En el teorema del coseno es necesario que al menos uno de los ángulos sea agudo.

45. ☐ El teorema del seno es aplicable a un triángulo isósceles.

46. ☐ El teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema del coseno.

Guía de Ejercicios

Observación: En esta guía se utiliza la notación csc = cosec.

(1) Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas

(a) $cos(2x) + cos(-x) = 0$.

(b) $\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

(c) $\operatorname{sen}(x) + \sqrt{2} = -\operatorname{sen}(x)$.

(d) $2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$.

(e) $\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \dfrac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} = 4$.

(f) $\csc(2x) - \cot(2x) = \tan(x)$.

(g) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen}(x)$.

(h) $\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

(2) Demuestre las siguientes identidades:

(a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

(b) $\cos u + \cos v = 2\cos\left(\dfrac{u-v}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$.

(c) $\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)$.

(d) $\cos(x) = f\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ (encuentre f).

(e) $\operatorname{sen}(x) = f\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ (encuentre f).

(3) Estudie las siguientes funciones, indicando dominio, ceros, periodicidad, signos, crecimiento y gráfico:

(a) $\sec(x)$.

(b) $\cot(x)$.

(c) $\csc(x)$.

(4) Demuestre que en todo triángulo de lados a, b y c y ángulos opuestos α, β, y γ se cumple que $b\cos(\gamma) - c\cos(\beta) = \dfrac{b^2-c^2}{a}$.

(5) Se necesita conocer la altura de un árbol ubicado en la ladera de un cerro. Para esto, se ubican dos puntos A y B sobre la ladera (A más abajo que B) a una distancia d y colineales con la base del árbol. Los ángulos de elevación desde A y B hasta la cúspide del árbol son α y β, respectivamente, y el ángulo de inclinación de la ladera es γ. Calcule la altura del árbol en función de los datos α, β, γ y d.

Guía de Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella antes de la clase auxiliar, que resuelva sus dudas en clases y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. (20 min.) Resuelva la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

Grafique las soluciones en el círculo geométrico y determine si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

P2. **(a)** (10 min.) Demuestre que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

(b) (15 min.) Utilice lo anterior para resolver la ecuación $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x = 0$.

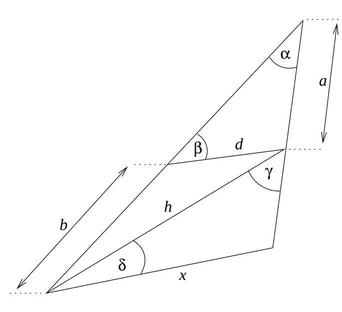
P3. (15 min.) Resuelva la ecuación

$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$$

P4. (30 min.) En un cuadrilátero A, B, C, D, conocemos los ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1. Pruebe que la longitud del cuarto lado AD es igual:

$$\sqrt{3 - 2\cos(\alpha) - 2\cos(\beta) + 2\cos(\alpha+\beta)}.$$

P5. Considere la siguiente figura

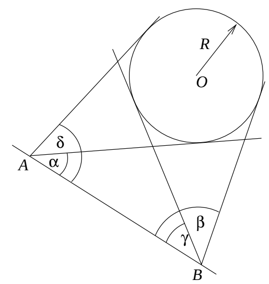


(1) (10 min.) Encuentre d en términos de α, β y a.

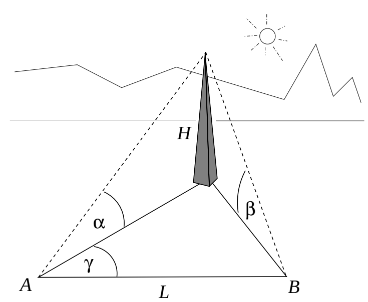
(2) (10 min.) Encuentre h en términos de α, β y d.

(3) (20 min.) Determine el valor de x.

P6. (30 min.) Se quiere medir el radio R de un estadio de forma circular, para lo cual se dispone de la distancia L entre los puntos A y B y los ángulos α, β, γ, δ entre las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A y B y el trazo $\overline{AB}$, como se muestra en la figura. Exprese R en términos de $L = \overline{AB}$ y α, β, γ, δ.



P7. (30 min.) La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$. (Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).



SEMANA 9:

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Sucesiones

Una *sucesión de números reales* es una secuencia infinita $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ donde cada término s_n corresponde a algún número real. Decimos que la sucesión $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ está *indexada* por los números naturales, en cuyo caso s_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión. Formalmente, una sucesión se define como sigue.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN) Una **sucesión real** es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

Observación:

- Para distinguir a una sucesión de las demás funciones, ocuparemos usualmente letras como s,u,v,w,a,b,c, etc. en lugar de f para denotar sucesiones. Además, la imagen de n, es decir, $s(n)$ se anotará como s_n en forma subindicial.

- En lugar de escribir $\begin{aligned} s : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto s_n \end{aligned}$

  para denotar una sucesión, utilizaremos alguna de las siguientes formas alternativas: (s_n), $\{s_n\}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$. En este caso, entenderemos que (s_n) representa a todos los términos de la sucesión, es decir,

  $$(s_n) = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_j, s_{j+1}, \ldots),$$

  donde $j \in \mathbb{N}$.

- En general, para describir una sucesión (s_n) nos bastará explicitar su término n-ésimo, lo que podrá ser mediante una fórmula explícita, una definición recursiva, o alguna descripción de cómo determinar s_n. Por ejemplo, podemos definir la sucesión de los números pares (s_n) no negativos simplemente diciendo que s_n es el n-ésimo número par no negativo en orden creciente, o equivalentemente mediante la fórmula $s_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- En muchas ocasiones, aceptaremos que un número finito de términos de la sucesión no estén definidos, o sea, funciones cuyo dominio no sea exactamente $\mathbb{N}$. Por ejemplo, la sucesión cuyo término n-ésimo está dado por $s_n = \sqrt{n^2 - 2}$ no está definida para $n = 0$ y $n = 1$, pero está bien definida para todo $n \geq 2$.

Ejemplo 9.1.

(1) $s_n = \dfrac{n^2+8}{n^2+5} + 2\sqrt{n}$

(2) (s_n) es la sucesión definida en forma recursiva por: $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$.

(3) (s_n) es la sucesión tal que su término n es el enésimo decimal de π ($\pi = 3,141592654\ldots$), $s_0 = \nexists, s_1 = 1,\ s_2 = 4,\ s_3 = 1,\ s_4 = 5, \ldots$.

(4) $s_n = \sqrt{n^2-9}$, $s_0 = \nexists$ $s_1 = \nexists$, $s_2 = \nexists$, $s_3 = 0$, $s_4 = \sqrt{7}$, ... Ésta es una sucesión porque sólo tres términos no están definidos.

(5) $s_n = \sqrt{(-1)^n}$

$$(s_n) = (1, \nexists, 1, \nexists, 1, \nexists, 1, \ldots)$$

Esta función no está definida para los valores de n impar y esto no es una cantidad finita de términos. Es decir, no es una sucesión.

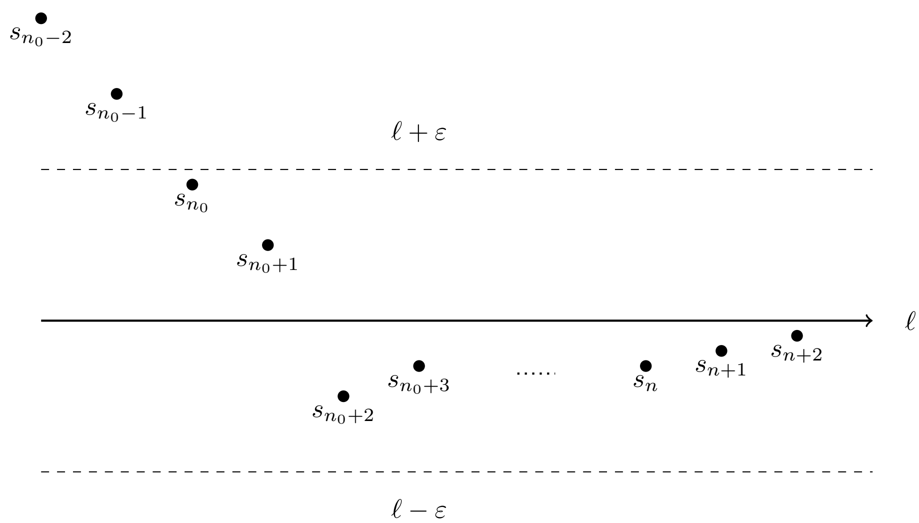
9.1 Convergencia de sucesiones

Dada una sucesión (s_n), nuestro interés se centrará en entender el comportamiento *asintótico* de s_n, es decir, comprender cómo es s_n cuando n es muy grande. Para ello, introduciremos una de las ideas clave de este curso, la noción de *límite de una sucesión*.

Informalmente, diremos que una sucesión (s_n) **converge** a un número real $\ell \in \mathbb{R}$ si s_n se *aproxima* a ℓ cuando n se hace muy grande. Por ejemplo, consideremos la sucesión (u_n) cuyo término n-ésimo es $u_n = 1,0\ldots01$ que tiene exactamente un 1 en la posición $n+1$ después de la coma. Notamos entonces que $u_0 = 1{,}1$, $u_1 = 1{,}01$, $u_2 = 1{,}001, u_{10} = 1{,}00000000001$, etc., por lo que hace sentido sospechar que u_n se aproxima a 1 a medida que n crece, es decir, pareciera ser que u_n converge a $\ell = 1$. Para formalizar esta idea, daremos una primera definición de convergencia.

Definición (Convergencia (definición informal)) Sea (s_n) una sucesión real y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Diremos que (s_n) converge a ℓ, o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo que se anota $s_n \to \ell$), si dado cualquier intervalo cerrado del tipo $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$, solo una cantidad finita de términos de (s_n) quedan fuera de él. Es decir, todo el resto de los términos de esta sucesión están dentro del intervalo.

El rol de ε en la definición anterior es de medir la **precisión** o con la que se aproxima la sucesión a ℓ. En palabras, (s_n) tiende a ℓ si s_n se aproxima a ℓ con precisión arbitrariamente pequeña, lo que se mide a través del parámetro ε. En efecto, si (s_n) converge a ℓ, entonces $s_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ para n suficientemente grande, o equivalentemente que $\ell - \varepsilon \leq s_n \leq \ell + \varepsilon$. Por lo tanto, entre más pequeño sea ε, más se parece s_n a ℓ.



Volviendo al ejemplo anterior de la sucesión (u_n) definida por $u_n = 1,00000001$, donde el 1 después de la coma aparece en la posición $n + 1$, notamos que si hacemos ε muy pequeño, digamos $\varepsilon = 10^{-10}$, entonces $1 - \varepsilon \leq u_n \leq 1 + \varepsilon$ equivale a

$$0{,}9999999999 \leq u_n \leq 1{,}0000000001,$$

lo que ocurre para todo $n \geq 10$. Esto se puede entender como que la sucesión (u_n) es igual a 1 con un error de $\varepsilon = 10^{-10}$, o equivalentemente que $u_n = 1 \pm 10^{-10}$ para $n \geq 10$.

Ejemplo 9.2.

Consideremos la sucesión (s_n) definida por $s_n = \frac{1}{n}$, es decir: $(s_n) = (\nexists, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$.

A simple vista pareciera que al crecer n, los valores de s_n se parecen cada vez más a 0, lo que nos hace sospechar que esta sucesión tiende a $\ell = 0$.

Para verificar esto, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario y analicemos cuáles términos de la sucesión quedan dentro del intervalo $[0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon]$ y cuáles quedan fuera. Vemos que

$$\begin{aligned} s_n \in [-\varepsilon, \varepsilon] &\iff -\varepsilon \leq s_n \leq \varepsilon, \\ &\iff -\varepsilon \leq \tfrac{1}{n} \leq \varepsilon, \\ &\iff \tfrac{1}{n} \leq \varepsilon, \\ &\iff n \geq \tfrac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se verifica **para todo** n tal que $n \geq 1/\varepsilon$ y, por lo tanto, $s_n \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ solo cuando $n < 1/\varepsilon$. Con esto, es claro que solo una cantidad finita de términos de la sucesión quedan fuera del intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, quedando todo el resto dentro de él.

Es importante observar que en la medida en que ε sea más y más pequeño, el número de términos de la sucesión que quedan fuera del intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ es cada vez más grande, sin embargo siempre será una cantidad finita.

Para formalizar la "definición informal" dada anteriormente, se debe explicitar qué significa, matemáticamente, que "sólo una cantidad finita de términos de la sucesión quedan fuera de $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$". Esto se hace escribiendo que a partir de un cierto término, todos los que siguen están dentro del intervalo. Es decir,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; s_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon].$$

Con esta consideración, la definición formal de convergencia es la que sigue:

Definición (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) **converge a** ℓ o bien que los términos s_n tienden a ℓ (lo cual anotaremos $s_n \to \ell$) si se cumple que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; s_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon].$$

Cuando (s_n) no converge a ningún real, entonces se dice que es una **sucesión divergente**.

Observación: Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; \ell-\varepsilon \leq s_n \leq \ell+\varepsilon,\\
&\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; |s_n-\ell| \leq \varepsilon,\\
&\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; |s_n-\ell| < \varepsilon,\\
&\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0)\; |s_n-\ell| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Observación:

- El intervalo $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ suele llamarse en el contexto de la Topología, *vecindad en torno a ℓ*. Luego, decir que $s_n \to \ell$ es equivalente a decir que a partir de cierto natural n_0 (es decir, para todo $n \geq n_0$), los términos s_n están todos dentro de esta vecindad en torno a ℓ.

- El factor $|s_n-\ell|$ es la forma en que se mide *distancia entre s_n y ℓ*, luego decir que $s_n \to \ell$ es equivalente a decir que a partir de cierto n_0 la distancia entre s_n y ℓ es menor o igual que ε. Como esto último debe ocurrir para cualquier precisión ε, se concluye que cuando $s_n \to \ell$, la distancia entre s_n y ℓ puede ser arbitrariamente pequeña.

- Es importante recalcar que el valor $n_0 \in \mathbb{N}$ que aparece en la definición de convergencia es un número que típicamente depende de ε que estamos tomando.

Ejemplo 9.3.

(1) Probar que $\dfrac{1}{n} \to 0$

Por demostrar que: $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \geq n_0)$ $|1/n - 0| \leq \varepsilon$. Lo primero que haremos es tomar $\varepsilon > 0$ arbitrario y la tarea entonces será determinar cuándo es válida la expresión $|1/n - 0| \leq \varepsilon$. Como

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon &\iff \frac{1}{n} \leq \varepsilon \\ &\iff n \geq \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

basta tomar $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, y se tendrá que:

$$n \geq n_0 \implies n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Observemos que en la demostración también pudo haberse elegido $n_0 = [1/\varepsilon] + 1000$ (o algo similar). Notamos entonces que el valor de n_0 no es único, ya que tomar cualquier otro valor mayor que él, también es útil para la prueba. Es decir, en la demostración de la convergencia sólo debemos probar la existencia de algún n_0, sabiendo que habrán otros que también pueden ser usados.

Es posible dar una demostración alternativa recordando que la propiedad arquimediana dice:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\; n_0\varepsilon > 1.$$

Notando que $(\forall n \geq n_0)$ se cumple además que $n\varepsilon \geq n_0\varepsilon > 1$, es decir, $n\varepsilon > 1$, la propiedad arquimediana puede escribirse, convenientemente, del siguiente modo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; n\varepsilon > 1.$$

Esta expresión es equivalente a la que deseábamos probar.

(2) Probar usando la definición que no es cierto que $\frac{1}{n} \to 2$.

Debe probarse que:

$$\neg \left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\; \left|\frac{1}{n} - 2\right| \leq \varepsilon\right],$$

es decir:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0)\; \left|\frac{1}{n} - 2\right| > \varepsilon.$$

Pero $|1/n - 2| = 2 - 1/n \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Luego, basta tomar $\varepsilon = 1/2$, con lo cual dado cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, si se toma $n = n_0$ la proposición es cierta.

En el próximo teorema veremos que el resultado de este ejemplo es más general, ya que siempre se cumple que cuando una sucesión converge a un real ℓ, no converge a otro real distinto.

Teorema 9.1. *Si* (s_n) *es una sucesión que converge a* $\ell_1 \in \mathbb{R}$ *y también a* $\ell_2 \in \mathbb{R}$, *entonces necesariamente* $\ell_1 = \ell_2$.

Demostración. Como la sucesión converge a ℓ_1 y también a ℓ_2, se cumplen simultáneamente las siguientes dos proposiciones

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0')\ |s_n - \ell_1| \leq \varepsilon$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0'')\ |s_n - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Notemos que hemos puesto n_0' y n_0'' en las dos frases anteriores, en lugar de un único n_0 para ambas. La razón de esto es que como, en general, n_0 depende de la sucesión, de ε y del punto al cual la sucesión converge, en la primera y segunda frase, los n_0 no tienen porqué ser iguales entre sí. De hecho, si supusiéramos a priori que el n_0 es el mismo, la demostración no sería correcta.

Como las dos frases anteriores son datos, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, si tomamos $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ se cumple simultáneamente que

$$(\forall n \geq n_0) \quad |s_n - \ell_1| \leq \varepsilon \ \wedge\ |s_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

En consecuencia, tomando $n = n_0$, se deduce que:

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - s_{n_0} + s_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - s_{n_0}| + |s_{n_0} - \ell_2| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Es decir $\forall \varepsilon \in (0, \infty)$, $\left|\frac{\ell_1 - \ell_2}{2}\right| \leq \varepsilon$.

Esto lo podemos interpretar, diciendo que $\dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ es una cota inferior de $(0, \infty)$, cuyo ínfimo es 0.

Por lo tanto concluimos que $\dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} \leq 0$. Además, es bien sabido que $\dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} \geq 0$.

Por lo tanto se concluye que $\dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} = 0$, es decir, que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

9.2 Límite

Definición (Definición de límite de una sucesión) Si (s_n) es una sucesión que converge a ℓ, entonces ℓ se llama **límite** de la sucesión, lo cual se anotará:

$$\ell = \lim s_n \qquad \text{o bien} \qquad \ell = \lim_n s_n \qquad \text{o bien} \qquad \ell = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Observación: La proposición anterior nos dice que el límite de una sucesión cuando existe, es único.

Ejemplo 9.4.
Probar que $\lim \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ \left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon. \tag{9.1}$$

Para hacer esta demostración, comencemos notando que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2n+2-(2n+3)}{2(2n+3)}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{4n+6}\right| \\
&= \frac{1}{4n+6} \\
&\leq \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Usando lo anterior, notamos que para demostrar (9.1), basta con demostrar la siguiente proposición auxiliar

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\quad \frac{1}{4n} \leq \varepsilon.$$

En efecto, esta última implica (9.1) ya que si $\dfrac{1}{4n} \leq \varepsilon$ entonces por el desarrollo anterior, se tendrá que $\left|\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$.

La demostración de la proposición auxiliar es muy fácil notando que $\dfrac{1}{4n} \leq \varepsilon$ equivale a $n \geq \dfrac{1}{4\varepsilon}$. Por lo tanto, podemos tomar $n_0 = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$ de modo que $\dfrac{1}{4n} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 9.5.
Probar que $\lim \sqrt{2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2}$

Aquí debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0) \quad \left| \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right| \leq \varepsilon.$$

Análogamente al ejemplo anterior, comencemos estudiando la diferencia entre módulo. Notemos que

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right| = \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} &= \frac{\left(\sqrt{2+1/n} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+1/n} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+1/n} + \sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{1/n}{\sqrt{2+1/n} + \sqrt{2}} \\ &\leq \frac{1/n}{\sqrt{2}} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Usando este desarrollo, vemos que para realizar la demostración, basta con estudiar la siguiente proposición auxiliar:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0) \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Esta proposición es cierta en virtud de la propiedad arquimediana.

9.3 Álgebra de sucesiones nulas y acotadas

Definición (Sucesión nula) (s_n) se llamará **sucesión nula** si $s_n \to 0$.

Ejemplo 9.6.
La sucesión $s_n = \frac{1}{n}$ es nula.

Recordando que una sucesión es una función con un dominio particular, las siguientes definiciones son una adaptación de las definiciones correspondientes ya hechas para las funciones en general.

DEFINICIÓN (SUCESIÓN ACOTADA) (s_n) es una **sucesión acotada** si

$$(\exists M > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n| \leq M.$$

Para probar que una sucesión (s_n) es acotada, muchas veces será más fácil probar que es acotada a partir de cierto punto, es decir, que $|s_n| \leq M$ para $n \geq n_0$. En efecto, definiendo $M' = \text{máx}\{|s_0|, |s_1|, \dots, |s_{n_0}|, M|\}$ se tiene que $|s_n| \leq M'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN (ÁLGEBRA DE SUCESIONES) Sean (u_n) y (v_n) sucesiones y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se definen las nuevas sucesiones $(u_n + v_n)$,$(u_n - v_n)$,$(u_n \cdot v_n)$,(u_n/v_n) y (λu_n) de la forma normal, es decir:

- $(u_n + v_n) = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n, \dots)$.
- $(u_n - v_n) = (u_0 - v_0, u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \dots, u_n - v_n, \dots)$.
- $(u_n \cdot v_n) = (u_0 \cdot v_0, u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2, u_3 \cdot v_3, \dots, u_n \cdot v_n, \dots)$.
- $(u_n/v_n) = (u_0/v_0, u_1/v_1, u_2/v_2, u_3/v_3, \dots, u_n/v_n, \dots)$.
  Obs: ésta es una sucesión sólo cuando $v_n = 0$ sólo para un número finito de términos.
- $(\lambda u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \dots, \lambda u_n, \dots)$.

Teorema 9.2. *Sean (u_n), (v_n) sucesiones. Las siguientes proposiciones son ciertas.*

(1) *(u_n) es nula si y sólo si $(|u_n|)$ es nula.*

(2) *Si (u_n) es una sucesión nula entonces (u_n) es una sucesión acotada.*

(3) *Si (u_n) es una sucesión nula y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|v_n| \leq u_n$ entonces (v_n) es una sucesión nula.*

(4) *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones nulas.*

(5) *Si (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son sucesiones acotadas.*

(6) *Si (u_n) es una sucesión nula y (v_n) es una sucesión acotada entonces $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. Un caso particular de esto es cuando $v_n = c$ constante.*

Ejemplo 9.7.

$u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ y $v_n = \cos\left(\dfrac{n!}{n^n \tan n}\right)$ es acotada, luego $\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n!}{n^n \tan n}\right) \to 0.$

Demostración. **Demostración de la propiedad 1.**

Que (u_n) y que $(|u_n|)$ sean nulas equivale a decir respectivamente que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ ||u_n| - 0| \leq \varepsilon.$$

Las que claramente son equivalentes.

Demostración de la propiedad 2.

Como (u_n) es una sucesión nula se tiene que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq \varepsilon.$$

Luego tomando $\varepsilon = 1$, concluimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $(\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq 1$.

Esta frase dice que $\{u_n : n \geq n_0\}$ es acotado.

Para probar que el conjunto de todos los términos de la sucesión es acotado, consideremos el real

$$M = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0}|, 1\}.$$

Claramente, se obtiene que $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_n| \leq M$ lo que significa que (u_n) es acotada.

Demostración de la propiedad 3.

Como (u_n) es una sucesión nula se tiene que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0' \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0') \quad |u_n| \leq \varepsilon.$$

Además el acotamiento del enunciado dice que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq u_n.$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$ tal que para todo $n \geq n_0''$ se cumplen simultáneamente que

$$|v_n| \leq u_n \leq \varepsilon.$$

Lo que corresponde a la definición misma de que (v_n) es una sucesión nula.

Demostración de la propiedad 4.

Si (u_n) y (v_n) son sucesiones nulas, es decir,

$$(\forall \varepsilon' > 0)\ (\exists n_0' \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0') \quad |u_n| \leq \varepsilon'$$

y

$$(\forall \varepsilon' > 0)\,(\exists n_0'' \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0') \quad |v_n| \leq \varepsilon'.$$

Tomando $n_0 = \text{máx}\,\{n_0', n_0''\}$ deducimos que simultáneamente se cumple que

$$(\forall \varepsilon' > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq \varepsilon' \text{ y } |v_n| \leq \varepsilon'.$$

Como esta proposición es cierta para todo $\varepsilon' > 0$, podemos escoger valores apropiados para ε' que faciliten la demostración.

De este modo, en el caso de suma de sucesiones, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomaremos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ de modo que se cumpla que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí, sumando las desigualdades y considerando que $|u_n+v_n| \leq |u_n|+|v_n|$, obtenemos que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) \quad |u_n + v_n| \leq \varepsilon,$$

lo que significa que la sucesión $(u_n + v_n)$ es nula.

En el caso de producto de sucesiones, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomaremos $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$ de modo que se cumpla que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ y } |v_n| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

De aquí, multiplicando las desigualdades y considerando que $|u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n|$, obtenemos que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) \quad |u_n v_n| \leq \varepsilon,$$

lo que significa que la sucesión $(u_n \cdot v_n)$ es nula.

Demostración de la propiedad 5.

Como (u_n) y (v_n) son sucesiones acotadas entonces existen $M_1 > 0$ y $M_2 > 0$ tales que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq M_1 \text{ y } |v_n| \leq M_2.$$

Luego, sumando o multiplicando las desigualdades se obtiene que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_1 + M_2$$

y

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leq M_1 \cdot M_2.$$

Lo que implica que las sucesiones $(u_n + v_n)$ y $(u_n \cdot v_n)$ son acotadas.

Demostración de la propiedad 6.

Como la sucesión (v_n) es acotada entonces existe $M > 0$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |v_n| \leq M.$$

Como además (u_n) es nula entonces, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \geq n_0) \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Luego $(\forall n \geq n_0)|u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leq \varepsilon$, lo que significa que $(u_n \cdot v_n)$ es una sucesión nula. $\square$

Para aprovechar el álgebra de sucesiones nulas para sucesiones convergentes a cualquier real, usamos la siguiente proposición.

Proposición 9.1. *Sea (s_n) una sucesión de números reales entonces*

$$s_n \to \ell \iff (s_n - \ell) \quad \textit{es una sucesión nula.}$$

Demostración. Basta con mirar la siguiente cadena de equivalencias

$$s_n \to \ell \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon \iff (s_n - \ell) \text{ es sucesión nula.}$$

□

Proposición 9.2. *Sea (s_n) una sucesión de números reales. Si (s_n) es convergente, entonces (s_n) es acotada.*

Demostración. Sea $\ell = \text{lím}\, s_n$. Como $s_n \to \ell$ entonces $(s_n - \ell)$ es una sucesión nula, luego $(s_n - \ell)$ es acotada, es decir,

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |s_n - \ell| \leq M.$$

Luego

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |s_n| = |s_n - \ell + \ell| \leq |s_n - \ell| + |\ell| \leq M + |\ell|.$$

Tomando $M' = M + |\ell| > 0$ se deduce que (s_n) es acotada. □

Terminamos esta sección mostrando que existen sucesiones acotadas que no son convergentes.

Proposición 9.3. *La sucesión $((-1)^n)$ no converge.*

Demostración. Supongamos que si lo hace, es decir, que existe ℓ tal que $(-1)^n \to \ell$.

Si $\ell > 0$ entonces, sólo un número finito de términos de la sucesión podría ser negativo. Esto no es posible ya que $(-1)^n = -1$ para todo n impar.

Análogamente, si $\ell < 0$ entonces sólo un número finito de términos podría ser positivo. Esto tampoco es posible, pues $(-1)^n = 1$ para todo n par.

Nos queda como única posibilidad que $\ell = 0$. En este caso, es fácil ver que para $\epsilon = \frac{1}{2}$, el número de términos de la sucesión fuera del intervalo $[-\epsilon + 0, 0 + \epsilon]$ es infinito, contradiciendo la definición de convergencia. Concluimos que a pesar de ser acotada la sucesión $(-1)^n$ diverge. □

9.4 Álgebra de sucesiones convergentes

Proposición 9.4 (Álgebra de límites). *Sean* (u_n) *y* (v_n) *dos sucesiones convergentes a* u *y* v*, respectivamente. Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces las sucesiones* (u_n+v_n)*,* (u_n-v_n)*,* $(u_n \cdot v_n)$ *y* (λu_n) *son también convergentes a* $u+v$*,* $u-v$*,* $u \cdot v$ *y* λu*, respectivamente.*

Es decir, si $u_n \to u$ *y* $v_n \to v$ *entonces:*

(1) $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$

(2) $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$

(3) $\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$

(4) $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim u_n$.

Demostración. **(1)** Hay que demostrar que: $(u_n + v_n) \to u + v$.

Sea $w_n = (u_n + v_n) - (u + v)$.

Reordenando, es claro que $w_n = (u_n - u) + (v_n - v)$, queda expresada como la suma de sucesiones nulas. Luego es nula. Con esto se ha probado que $(u_n + v_n) \to u + v$.

(2) Se debe probar que: $(u_n - v_n) \to u - v$

Sea $w_n = (u_n - v_n) - (u - v)$.

Es claro que $w_n = (u_n - u) - (v_n - v)$ es la diferencia de sucesiones nulas; luego es nula. Con esto se ha probado que $(u_n - v_n) \to u - v$.

(3) Se debe demostrar que: $(u_n \cdot v_n) \to u \cdot v$. Sea $w_n = (u_n \cdot v_n) - (u \cdot v)$. Reordenando se tiene que

$$\begin{aligned} w_n &= u_n \cdot v_n - u \cdot v_n + u \cdot v_n - u \cdot v \\ &= (u_n - u)v_n + u(v_n - v). \end{aligned}$$

O sea, (w_n) es una combinación de sucesiones nulas y acotadas, luego es nula. Con esto se ha probado que $(u_n \cdot v_n) \to u \cdot v$.

(4) Se debe probar que: $(\lambda u_n) \to \lambda u$.

Basta considerar $v_n = \lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual esta proposición es un caso particular del caso anterior.

□

Con el teorema anterior pueden calcularse los límites de sucesiones formadas como sumas, diferencias, producto o ponderación de sucesiones convergentes. Queda el problema de calcular el límite de una sucesión obtenida como el cociente de sucesiones convergentes. Con respecto a este problema, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 9.5. *Si* (s_n) *es una sucesión nula, entonces la sucesión* $\left(\dfrac{1}{s_n}\right)$*, de estar bien definida, es no acotada y en consecuencia no es convergente.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $\left(\dfrac{1}{s_n}\right)$ es acotada, entonces la sucesión (v_n) definida por $v_n = s_n \cdot \frac{1}{s_n}$ es el producto de una sucesión nula por una acotada.

Esto implica que (v_n) es una sucesión nula, es decir, $v_n \to 0$.

Sin embargo, claramente, $v_n = s_n \cdot \dfrac{1}{s_n} = 1$ es la sucesión constante que converge a 1. Esto es una contradicción, ya que $1 \neq 0$.

Luego $\left(\dfrac{1}{s_n}\right)$ no es una sucesión acotada. $\square$

Proposición 9.6. *Sea* (s_n) *una sucesión real. Si* (s_n) *converge a* $\ell \neq 0$ *entonces:*

(1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ *tal que* s_n *tiene el mismo signo de* ℓ *(es decir* $s_n \cdot \ell > 0$ *).*

(2) *La sucesión* $\left(\dfrac{1}{s_n}\right)$ *es acotada.*

Demostración. Para fijar ideas, supongamos que $\ell > 0$. Que $s_n \to \ell$ significa que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \ell - \varepsilon \leq s_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Luego tomando $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \geq n_0) \quad \frac{\ell}{2} \leq s_n \leq 3\frac{\ell}{2}.$$

Con esto se ha probado **(1)**, ya que $\frac{\ell}{2} > 0$.

Para probar **(2)** escribamos lo siguiente:

$$(\forall n \geq n_0) \quad \frac{2}{3\ell} \leq \frac{1}{s_n} \leq \frac{2}{\ell}$$

y consideremos el real $M = \max\left\{\left|\dfrac{1}{s_1}\right|, \left|\dfrac{1}{s_2}\right|, \ldots, \left|\dfrac{1}{s_{n_0}}\right|\right\}$.

Con esto es claro que $(\forall n \in \mathbb{N}) \left|\dfrac{1}{s_n}\right| \leq M$, es decir, la sucesión $\left(\dfrac{1}{s_n}\right)$ está bien definida y es acotada. $\square$

Proposición 9.7. *Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a u y v respectivamente. Si $v \neq 0$, la sucesión (u_n/v_n) es convergente a (u/v).*

Es decir

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

Demostración. Veamos que: $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{u}{v}$. Sea $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{u}{v}$.

Ordenando esta expresión, es claro que

$$w_n = \frac{u_n v - u v_n}{v_n v} = \left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{v_n}\right) \cdot (u_n v - u v_n).$$

Por la proposición anterior, se deduce que $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ es una sucesión acotada y por álgebra se tiene que $(u_n v - u v_n)$ es una sucesión nula, luego(w_n) es una sucesión nula. Con esto se ha probado la proposición. $\square$

Observación: Si la sucesión (v_n) es nula, pueden obtenerse diferentes casos, dependiendo de cual sea la sucesión del numerador (u_n). Algunos casos son los siguientes:

(1) Si (u_n) converge a $\ell \neq 0$ entonces (u_n/v_n) no es acotada puesto que (v_n/u_n) es nula.

(2) Si (u_n) es también nula, no hay regla para el cuociente. Algunos ejemplos sencillos son:

- **(a)** Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ y $v_n = \dfrac{1}{n}$ entonces $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge a $\ell = 1$.
- **(b)** Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ y $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ entonces $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ no es acotada y luego no converge.
- **(c)** Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ y $v_n = \dfrac{1}{n}$ entonces $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ es una sucesión nula.
- **(d)** Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ y $v_n = \dfrac{1}{n}$ entonces $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ es una sucesión acotada pero no convergente.

9.5 Límites importantes (1)

Usando los teoremas de álgebra de sucesiones se prueban fácilmente los siguientes resultados.

(1) $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.

(2) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

(3) $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.

(4) $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.

(5) Para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definamos

$$s_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

- Si $p < q$, entonces $s_n \to 0$.
- Si $p = q$, entonces $s_n \to \dfrac{a_p}{b_q}$.
- Si $p > q$, entonces $\left(\dfrac{1}{s_n}\right) \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.

(6) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(7) $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Finalizamos este capítulo con dos límites trigonométricos muy importantes.

Proposición 9.8. *Sea $(a_n) \to a$, entonces*

(1) $(\operatorname{sen} a_n) \to \operatorname{sen} a$.

(2) $(\cos a_n) \to \cos a$.

DEMOSTRACIÓN. **(1)** Primero veamos que si $(a_n) \to 0$ entonces $(\operatorname{sen}(a_n)) \to 0$. En efecto, como $|\operatorname{sen}(a_n)| = \operatorname{sen}(|a_n|)$ para $a_n \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\operatorname{sen}(|a_n|) \leq |a_n|$, cuando $(a_n) \to 0$ se obtiene que $(\operatorname{sen}(a_n)) \to 0$. Por otro lado, sabemos que

$$\operatorname{sen}(a_n) - \operatorname{sen}(a) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a_n - a}{2}\right) \cos\left(\frac{a_n + a}{2}\right).$$

Como $a_n - a \to 0$ y $\cos(x)$ es acotada se deduce que $(\operatorname{sen}(a_n)) \to \operatorname{sen}(a)$.

(2) La situación para el coseno se deduce usando la propiedad ya vista. En efecto,

$$\cos(a_n) = \operatorname{sen}\left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) \to \operatorname{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a).$$

$\square$

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ $(\sqrt{9-n^2})$ es una sucesión.

2. $\square$ $(\sqrt{n^2-4n-1})$ es una sucesión.

3. $\square$ $\left(\dfrac{1}{[1/n]}\right)$ es una sucesión.

4. $\square$ $\left(\left[\dfrac{1}{n}\right]\right)$ es una sucesión.

5. $\square$ La definición de convergencia de (a_n) a l es equivalente a que para todo $a>0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - l| > a\}$ es infinito.

6. $\square$ La definición de convergencia de (a_n) a l es equivalente a que para todo $a>0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - l| > a\}$ es finito.

7. $\square$ La definición de convergencia de (a_n) a l es equivalente a que para todo $a>0$ existe $b \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq b$ se cumple $|a_n - l| \leq a$.

8. $\square$ La definición de convergencia de (a_n) a l es equivalente a que para todo $a>0$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \geq b$ se cumple $|a_n - l| \leq a$.

9. $\square$ La definición de convergencia de (a_n) a l es equivalente a que para todo $a>0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - l| \leq a\}$ es finito.

10. $\square$ Una sucesión (u_n) diverge si para todo $l \in \mathbb{R}$ no es cierto que $(u_n) \to l$.

11. $\square$ La sucesión $\frac{1}{n}$ converge a 0.

12. $\square$ La sucesión $\frac{1}{n}$ no converge a 1.

13. $\square$ La sucesión $u_n = 2$ converge a 2.

14. $\square$ La sucesión $u_n = 0$ converge a 2.

15. $\square$ Existen sucesiones con todos sus términos positivos y cuyo límite es -1.

16. $\square$ Si la sucesión (u_n) converge a $l \neq 1$ entonces la sucesión $6u_n$ converge a 6.

17. $\square$ Si (u_n) converge a cero y (v_n) converge a $l \neq 0$ entonces $(u_n v_n)$ converge a l.

18. $\square$ Si $p(n)$ y $q(n)$ son dos polinomios de grado 10 y 11, respectivamente entonces $\left(\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)$ no es acotada.

19. $\square$ Si $p(n)$ y $q(n)$ son dos polinomios de grado 101 y 110, respectivamente entonces $\left(\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)$ no es acotada.

20. $\square$ Si $p(n)$ y $q(n)$ son dos polinomios de grado 4 entonces, $\left(\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)$ converge a 0.

21. $\square$ $\lim \dfrac{n+1}{2n+3} = 0.$

22. $\square$ $\lim \sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} = 1.$

23. $\square$ $\lim \dfrac{\operatorname{sen}(n^n)}{n} = 0.$

24. $\square$ La sucesion $\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ diverge.

25. $\square$ Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones convergentes a a y $b \neq 0$, respectivamente. Entonces la sucesión $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ converge a $\dfrac{a}{b}$

26. $\square$ El límite de una sucesión cuando existe es único.

27. $\square$ Toda sucesión convergente es acotada.

28. $\square$ Toda sucesión acotada es convergente.

29. $\square$ La suma y el producto de sucesiones convergentes es convergente.

30. $\square$ La suma y el producto de sucesiones convergentes a cero son sucesiones nulas.

31. $\square$ La suma y el producto de sucesiones acotadas son sucesiones acotadas.

32. $\square$ El producto de una sucesión acotada por una convergente es convergente.

33. $\square$ El producto de una sucesión acotada por una convergente a cero es una sucesión nula.

34. $\square$ $\lim(-1)^n = 1.$

35. $\square$ Para cada $a \in \mathbb{R}$, el límite de la sucesión $\dfrac{a^n}{n!} = 0$

36. $\square$ Para cada $a \in \mathbb{R}$, la sucesión $\dfrac{n!}{a^n}$ es acotada.

37. $\square$ Para todo par de sucesiones nulas (u_n) y (v_n), la sucesión $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge a 1.

Guía de Ejercicios

(1) Considere la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ cuyo límite es $l = 0$. Para cada $\epsilon \in \left\{1, \dfrac{1}{100}\right\}$ encuentre algún $n_0 \in \mathbb{N}$ que para todo $n \geq n_0$ satisfaga $|a_n - l| \leq \epsilon$. Repita el ejercicio para $a_n = \dfrac{2}{n^2} - 1$ y $l = -1$.

(2) Use la definición de convergencia de una sucesión para demostrar las siguientes igualdades.

(a) $\text{lím} \dfrac{2n-5}{2n-7} = 1$.

(b) $\text{lím} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \dfrac{2}{3}$.

(c) $\text{lím} \cos(n!\pi x) = 1$, para $x \in \mathbb{Q}$.

(d) $\text{lím}\, n\left(\left|x + \dfrac{1}{n}\right| - |x|\right) = -1$, para $x < 0$.

(e) $\text{lím} \left[\dfrac{a}{n}\right] \dfrac{n}{b} = 0$.

(f) $\text{lím} \sqrt{\dfrac{1}{n}} = 0$.

(3) Calcule los siguientes límites.

(a) $\text{lím} \dfrac{2n+4}{3n+1}$.

(b) $\text{lím} \dfrac{4n^4+2}{5n^5-6n+1}$.

(c) $\text{lím} \dfrac{n-n^3+3}{n^3+n-7}$.

(d) $\text{lím} \dfrac{n\sqrt{n}-n+3}{n^2+n-7}$ (puede usar **(2)(f)**).

(e) $\text{lím} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(f) $\text{lím}\, \text{máx} \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$.

(g) $\text{lím} \dfrac{n(-1)^n}{1-(n+3)^4}$.

(h) $\text{lím} \dfrac{n - sen(n)}{n^2-16}$.

(4) Demuestre que si $\text{lím}\, a_n = l$ entonces $\text{lím}\, a_{n+1} = l$, $\text{lím}\, a_{n+2} = l$, $\text{lím}\, a_{n-1} = l$, $\text{lím}\, a_{2n} = l$ y $\text{lím}\, a_{2n+1} = l$.

(5) Demuestre que si $\sqrt{a_n}$ es una sucesión con $\lim a_n = l$ entonces $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$. Se sugiere que separe su análisis en los casos $l = 0$ y $l > 0$. En el primero caso demuestre la propiedad usando la definición de convergencia. En el segundo caso, escriba $\sqrt{a_n} - \sqrt{l}$ como el producto $1/(\sqrt{a_n} + \sqrt{l}) \cdot (a_n - l)$, demuestre que el primer término es una sucesión acotada y note que el segundo es una sucesión nula. Termine el análisis de este caso usando el álgebra de límites. ¿Por qué era necesario separar los casos $l = 0$ y $l > 0$?.

(6) Calcule los siguientes límites.

a) $\lim(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$.

b) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}$.

(7) Sea (u_n) una sucesión que verifica $(\exists n_0)(\forall \epsilon > 0) \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - u| < \epsilon$. Pruebe que el número de términos distintos de la sucesión es finito.

Guía de Problemas

P1. (15 min.) Calcule

$$\lim \frac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{\sqrt{n}} \cos\left(\dfrac{n^n}{n!}\right) + \dfrac{2n+1}{3-3n}}{\dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}$$

P2. (30 min.) Calcule $\lim p(n)\dfrac{a^n}{n^n}$, para $p(n)$ un polinomio de grado k, $k \in \mathbb{N}$. Puede ser de utilidad comenzar considerando el polinomio $p(n) = n^k$ y luego utilizar el álgebra de límites.

P3. (30 min.) Demuestre que si $\lim na_n$ existe entonces $\lim a_n = 0$.

P4. (30 min.) Si se sabe que para α y β positivos $\lim n(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta))$ existe, calcule el valor de α y β, y luego el valor del límite.

P5. (30 min.) Sean (a_n) y (b_n) tal que $\lim a_n = l$ y $\lim b_n = r$. Demuestre que $\lim \max\{a_n, b_n\} = \max\{l, r\}$.

P6. (30 min.) Sea $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que para todo n, $t(n) \geq n$ y a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Demuestre que $\lim a_{t(n)} = l$.

Sucesiones

10.1 Teorema del Sandwich.

Antes de probar el teorema del Sandwich, necesitamos el siguiente resultado, que establece que el límite de sucesiones preserva el orden.

Proposición 10.1. *Sean (u_n) y (w_n) sucesiones convergentes a u y w, respectivamente. Si existe n_0 tal que*

$$u_n \leq w_n \qquad \text{para todo } n \geq n_0,$$

entonces $u \leq w$.

DEMOSTRACIÓN. Usando el álgebra de límites podemos suponer que $u_n = 0$ y entonces que $u = 0$. Si $w < 0$ entonces a partir de algún n_0 los términos de la sucesión (w_n) deben ser todos negativos, lo que es contrario a la hipótesis del teorema. □

El resultado anterior implica que una sucesión convergente cuyos términos son positivos, lo hace a un límite $\ell \geq 0$. Recordando que $\lim 1/n = 0$, notamos que no es posible cambiar la conclusión anterior por $\ell > 0$.

Además, esta proposición nos permite probar que si (u_n), (v_n) y (w_n) son sucesiones convergentes a u, v y w, respectivamente, y $u_n \leq v_n \leq w_n$, entonces $u \leq v \leq w$. En particular, si $u = w$ entonces $v = u = w$. El próximo teorema garantiza esta misma conclusión, sin asumir que la sucesión (v_n) sea convergente.

Teorema 10.1 (Teorema del Sandwich). *Sean (u_n), (v_n) y (w_n) sucesiones reales. Si (u_n) y (w_n) convergen al real ℓ y además tal que*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ u_n \leq v_n \leq w_n,$$

entonces la sucesión (v_n) también converge y $\lim v_n = \ell$.

Demostración. Al ser las sucesiones (u_n) y (w_n) convergentes a ℓ tenemos que:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0' \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0') \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0'' \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0') \quad |w_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Para $\varepsilon > 0$ y $n \geq \text{máx}\{n_0', n_0''\}$ se cumplen simultáneamente las desigualdades

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell$$

y

$$w_n - \ell \leq \varepsilon.$$

Por otra parte, para $n \geq \text{máx}\{n_0, n_0', n_0''\}$ se cumple que $u_n \leq v_n \leq w_n$. De este modo para todo $\varepsilon > 0$ existe $\hat{n}_0 = \text{máx}\{n_0, n_0', n_0''\}$ que para todo $n \geq \hat{n}_0$ satisface

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \varepsilon.$$

Esto prueba la convergencia de (v_n) a ℓ. □

10.2 Desigualdad de Bernoulli (I).

La siguiente propiedad conocida como desigualdad de Bernoulli, nos será muy útil en el uso del Teorema del Sandwich.

Propiedad 10.1 (Desigualdad de Bernoulli (I)). *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h > -1$, se cumple que*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Demostración. La propiedad se demuestra mediante el siguiente argumento de inducción. Claramente la desigualdad es válida para $n = 0$. Si aceptamos que es cierta para algún n entonces tendremos que para $h > -1$ se cumple que:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Como $1 + h > 0$ podemos deducir que

$$(1+h)^n (1+h) \geq (1+nh)(1+h).$$

Sabemos que $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n (1+h)$ y que $(1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2$. Entonces, como $nh^2 \geq 0$, concluimos que: $(\forall h > -1)$,

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &\geq (1+nh)(1+h)\\ &= 1+(n+1)h+nh^2\\ &\geq 1+(n+1)h.\end{aligned}$$

□

La sucesión (q^n), para $q \in \mathbb{R}$.

Propiedad 10.2. *Sea $q \in \mathbb{R}$.*

(1) $\lim q^n = 1$, *si* $q = 1$.

(2) $\lim q^n = 0$, *si* $|q| < 1$.

(3) $\lim q^n$ *no existe si* $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

Seguiremos el análisis por casos:

- **Caso $q \in (0, 1]$.**

  El primer caso, $q = 1$, es directo.

  Para el caso $q \in (0, 1)$ aplicamos la desigualdad $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, con h tal que $\dfrac{1}{1+h} = q$, es decir $\dfrac{1}{q} = 1 + h$, y nos queda

  $$\left(\frac{1}{q}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{q} - 1\right).$$

  Como $q \in (0, 1)$, la desigualdad anterior implica las desigualdades:

  $$\frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{q} - 1\right)} \geq q^n \geq 0.$$

  El lado izquierdo de la última desigualdad es una sucesión convergente a cero.

  Su lado derecho es la sucesión constante que converge a cero.

  Aplicando el Teorema del Sandwich concluimos que $(q^n) \to 0$.

- **Caso** $q \in (-1, 1)$

  Reducimos este caso al anterior observando que si $q \in (-1, 1)$ entonces $|q| \in [0, 1)$.

  Como ya vimos que en esta situación se cumple que

  $$(|q|^n) \to 0,$$

  concluimos que $(q^n) \to 0$.

- **Caso** $q \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

  Para $q \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ la sucesión $\left(\dfrac{1}{q}\right)^n$ es nula, pues $\dfrac{1}{q} \in (-1, 1)$.

  Usando lo que sabemos para los recíprocos de sucesiones nulas concluimos que la sucesión (q^n) diverge.

- **Caso** $q = -1$

  Este caso es directo ya que sabemos que la sucesión $(-1)^n$ no converge.

Ejemplo 10.1.
Los siguientes casos son parte de los resultados anteriores: $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$, $\lim 2^n$ no existe y $\lim (-3)^n$ tampoco existe.

La sucesión $(q_n)^n$, para $(q_n) \to q$, con $|q| < 1$.

Usando el resultado anterior podemos estudiar la sucesión $((q_n)^n)$ cuando (q_n) es una sucesión convergente a un real $q \in (-1, 1)$. En efecto, como $(q_n) \to q$, para $\varepsilon = \frac{|q|+1}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$0 \leq |q_n| \leq \frac{|q|+1}{2}.$$

Por lo tanto, elevando a la potencia n se obtiene que

$$0 \leq |q_n|^n \leq \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$

De aquí, tomando límite, aplicando Sandwich de sucesiones y considerando que $\frac{|q|+1}{2} \in (0, 1)$, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} |q_n|^n = 0.$$

La sucesión $(q_n)^n$, para $(q_n) \to q$, con $|q| > 1$.

Notemos que si $|q| > 1$, la sucesión $((q_n)^n)$ es no acotada, ya que su recíproco converge a cero. Por lo tanto, es una sucesión divergente.

Ejemplo 10.2.
Los siguientes casos son parte de los resultados anteriores: $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right)^n = 0$, $\lim \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n = 0$, $\lim \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ no existe y $\lim \left(\frac{3n+2}{1-n}\right)^n$ tampoco existe.

La sucesión $(\sqrt[n]{a})$, para $a \in (0, \infty)$

Probaremos que $(\sqrt[n]{a}) \to 1$ separando el análisis en los casos $a > 1$ y $a \in (0, 1)$; el caso $a = 1$ es evidente.

- **Caso $a > 1$.**

Al aplicar la desigualdad de Bernoulli con $h = \dfrac{a-1}{n}$ se obtiene.

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{(a-1)}{n} = a.$$

Usando la monotonía de la función $\sqrt[n]{x}$ se obtiene

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{a}.$$

Como $a > 1$ se logra el acotamiento

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{a} \geq 1,$$

donde las sucesiones de los extremos convergen a 1. Usando el Teorema del Sandwich, concluimos que

$$\left(\sqrt[n]{a}\right) \to 1.$$

- **Caso $a \in (0,1)$.**

  Como

  $$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

  y $\frac{1}{a} > 1$ podemos aplicar el caso anterior y obtener que $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right) \to 1$. Aplicando el álgebra de límites de sucesiones, concluimos que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Ejemplo 10.3.
Como antes, tenemos los siguientes casos: $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{10}} = 1$ y $\lim \sqrt[n]{10^{10}} = 1$. En el siguiente análisis se extenderá lo hecho para $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ al caso de $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ con $(a_n) \to a > 0$. En particular probaremos que: $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{n^2}} = 1$, $\lim \sqrt[n]{10^{10} - \dfrac{1}{n^2}} = 1$, $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim \left(\dfrac{n^8 - 7n^2 + 1}{3n^8 + 1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

La sucesión $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$, para $(a_n) \to a > 0$.

Usando el resultado anterior podemos estudiar la sucesión $\sqrt[n]{a_n}$ cuando (a_n) es una sucesión convergente a un real $a > 0$. En efecto, dado que $(a_n) \to a$, para $\epsilon = \frac{a}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$\frac{a}{2} \leq a_n \leq \frac{3a}{2}.$$

Por lo tanto, tomando raíz n-ésima se obtiene que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

De aquí, tomando límite y aplicando sandwich de sucesiones, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Antes de continuar: Notemos que en el desarrollo anterior, es importante que $a > 0$. ¿Qué ocurre cuando $a = 0$? Un ejemplo de esto es la sucesión $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$. Tendremos que posponer el análisis de la convergencia de esta sucesión, hasta discutir la variante de la desigualdad de Bernoulli que veremos a continuación.

10.3 Desigualdad de Bernoulli (II).

Proposición 10.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h > 0$, se cumple que*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2}.$$

Su demostración es muy similar a la realizada para la desigualdad de Bernoulli y se propone como ejercicio.

La sucesión $(\sqrt[n]{n})$.

Haciendo uso de la desigualdad de Bernoulli (II), para $h = \frac{2}{\sqrt{n}}$ y $n > 0$ se obtiene

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + n\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n} \geq 1 + 2(n-1) \geq n.$$

De este modo,

$$1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1.$$

Como ambos extremos convergen a 1, concluimos que $(\sqrt[n]{n}) \to 1$.

Observación: Notemos que lo anterior implica que la sucesión $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) \to 1$, lo que responde nuestra interrogante pendiente.

La sucesión $\left(n^k q^n\right)$.

- **La sucesión (nq^n), para $q \in (-1,1)$.**

  Veamos que $(|nq^n|) \to 0$, para $q \in (-1,1)$. Con esto tendremos que $(nq^n) \to 0$, para $q \in (-1,1)$. Como $n\,(0)^n = 0$ podemos suponer que $q \neq 0$.

  Usando la segunda forma de la desigualdad de Bernoulli (II) para $h = \frac{1}{|q|} - 1$ obtenemos
  $$\frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}$$
  Al multiplicar esta expresión por n y reemplazar el valor de h en el lado izquierdo, se obtiene que
  $$0 \leq n\,|q|^n \leq \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}.$$
  Siendo h una constante, ambos extremos convergen a cero. Concluimos que $(n\,|q|^n)$ es una sucesión nula.

> **Ejemplo 10.4.**
> Como antes, tenemos los siguientes casos: $\text{lím}\,\dfrac{n}{2^n} = 0$ y $\text{lím}\,\dfrac{n}{(1,000001)^n} = 0.$
> En el siguiente análisis se extenderá lo hecho antes al caso de potencias de n. Todas estas sucesiones resultarán ser nulas. En particular probaremos que:
> $$\text{lím}\,\frac{n^{10^{10}}}{(1,000001)^n} = 0.$$

- **La sucesión $(n^k q^n)$, para $k \in \mathbb{N}$ y $q \in (-1,1)$.**

  Este caso será analizado haciendo uso del álgebra de límites de sucesiones nulas.

  Notemos que se cumple la siguiente igualdad.
  $$n^k\,|q|^n = \left(n\left(\sqrt[k]{|q|}\right)^n\right)^k.$$
  Como $q' = \sqrt[k]{|q|} \in [0,1)$, según lo antes analizado se satisface que
  $$\left(n\,(q')^n\right) \to 0.$$
  La conclusión se obtiene al recordar la siguiente propiedad del las sucesiones nulas,
  $$\left(n\,(q')^n\right) \to 0 \Rightarrow \left(\left(n\,(q')^n\right)^k\right) \to 0.$$

10.4 Desigualdad de Bernoulli (III)

Usando la desigualdad de Bernoulli podemos deducir la validez de otra desigualdad que será útil en la aplicación del teorema del sandwich al estudio de la sucesión $\left((1+h_n)^n\right)_n$, cuando $(h_n) \to 0$. La desigualdad es

Proposición 10.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $u \in \left(-1, \frac{1}{n}\right)$, se tiene que*

$$(1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}.$$

Demostración. Al aplicar la desigualdad de Bernoulli con $h = \dfrac{1}{1+u} - 1$, que para $1+u > 0$ cumple que $h > -1$, se obtiene:

$$(1+h)^n = \left(\frac{1}{1+u}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{1+u} - 1\right).$$

La expresión $n\left(\frac{1}{1+u} - 1\right) = -\frac{nu}{1+u} \geq -nu$ cuando $1+u > 0$. Con esto

$$\left(\frac{1}{1+u}\right)^n \geq 1 - nu.$$

Finalmente, como $1 - nu > 0$, es posible tomar los recíprocos y obtener la conclusión.

$$(1+u)^n \leq \frac{1}{1-nu}.$$

□

La sucesión $(1+h_n)^n$, para (h_n) y (nh_n) nulas.

Proposición 10.4. *Se tiene que*

$$\lim (1+h_n)^n = 1,$$

cuando (h_n) y (nh_n) son sucesiones nulas.

Demostración. Como $(h_n) \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_n \in (-1, 1)$, para $n \geq n_0$.
Al aplicar la desigualdad de Bernoulli (I) con $h = h_n > -1$ se obtiene

$$1 + nh_n \leq (1+h_n)^n.$$

Como $(nh_n) \to 0$, existe n_0' tal que $nh_n \in (-1, 1)$, para $n \geq n_0'$.
Al aplicar la desigualdad de Bernoulli (III) con $u = h_n$ se obtiene

$$(1+h_n)^n \leq \frac{1}{1-nh_n}.$$

De este modo, para $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ se obtiene lo siguiente.

$$1 + nh_n \leq (1+h_n)^n \leq \frac{1}{1-nh_n}.$$

Entonces, como $(nh_n) \to 0$, las sucesiones en los extremos convergen a 1. Aplicando el Teorema del Sandwich se concluye que $\lim (1+h_n)^n = 1$. □

Ejemplo 10.5.
Con lo recién hecho es posible calcular los siguientes límites: $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$, $\lim \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n = 1$ y más, generalmente, para todo x e y,

$$\lim \left(1 - \frac{xy}{(n+x)(n+y)}\right)^n = 1.$$

Hasta ahora hemos determinado la convergencia de sucesiones de la forma $(1 + h_n)^n$en dos casos:

$$(h_n) \to h \text{ con } h \neq 0, -2 \text{ y } (h_n) \to 0 \text{ con } (nh_n) \to 0.$$

Como ejercicio se le pedirá analizar el caso de una sucesión $(1 + h_n)^n$que satisface $(h_n) \to 0$ y $\left(\dfrac{1}{nh_n}\right) \to 0$ en dos situaciones especiales: cuando todos los términos de (h_n) son positivos y cuando todos son negativos.

Con la ayuda del teorema de la sección siguiente se probará la convergencia de la sucesión $(1 + x/n)^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Ésta corresponde a elegir $h_n = x/n$ y con esto $(nh_n) \to x$. El caso $x = 0$ ya fue considerado. Al final de esta semana veremos el caso $x = 1$. El estudio de los sucesiones restantes de esta familia y otras más complejas, se realizará en el capítulo de la función exponencial en la semana 11.

10.5 Sucesiones monótonas

Definiciones y ejemplos.

DEFINICIÓN Sea (s_n) una sucesión real. Entonces:

- Diremos que (s_n) es una **sucesión creciente** a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene $s_{n+1} \geq s_n$.
- Diremos que (s_n) es una **sucesión decreciente** a partir de n_0 si $\forall n \geq n_0$ se tiene $s_{n+1} \leq s_n$.

Observación:

- Usualmente omitiremos la expresión "a partir de n_0" diciendo simplemente que la sucesión es creciente o que es decreciente.
- Esto conlleva un abuso de lenguaje pues no es lo mismo decir que una sucesión es creciente que decir que una función es creciente.

- Si las desigualdades se satisfacen en forma estricta, es decir $>$ o $<$, entonces hablaremos de sucesiones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes, según sea el caso.
- Si una sucesión es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces la llamaremos sucesión **monótona**.

Ejemplo 10.6.
La sucesión

$$t_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)},$$

es estrictamente decreciente. En efecto,

$$t_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = t_n \frac{2n+1}{2n+2} < t_n.$$

Además, esta sucesión es acotada inferiormente por 0 y superiormente por $t_1 = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 10.7.
Consideremos la sucesión (s_n) definida por la recurrencia $s_1 = \sqrt{2}$ y

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}.$$

- (s_n) **es acotada.**

  Veamos que es acotada superiormente por 2, probando que

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n \leq 2.$$

  Para $n = 1$ es cierto ya que $s_1 = \sqrt{2}$.

  Suponiendo que $s_n \leq 2$ tenemos que $2 + s_n \leq 4$ lo que permite concluir que

  $$s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n} \leq \sqrt{4} = 2.$$

- (s_n) es creciente. Probemos que

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} \geq s_n.$$

  De la definición de s_{n+1} se tiene que

  $$s_{n+1}^2 - s_n^2 = 2 + s_n - s_n^2.$$

  Entonces,

  $$s_{n+1}^2 - s_n^2 = (2 - s_n)(1 + s_n).$$

  El lado derecho de la última igualdad es mayor o igual a cero, ya que $0 \leq s_n \leq 2$. Concluimos que $s_{n+1}^2 - s_n^2 \geq 0$.

  Esto último demuestra que $s_{n+1} \geq s_n$.

Teorema 10.2 (Teorema de las sucesiones monótonas). *Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) creciente a partir de n_0 y acotada superiormente entonces es convergente y*

$$\lim s_n = \sup \{s_n : n \geq n_0\}.$$

Si (s_n) es una sucesión (estrictamente) decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente entonces es convergente y

$$\lim s_n = \inf \{s_n : n \geq n_0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos la primera afirmación. La segunda será parte de los ejercicios.

Supongamos que (s_n) es creciente a partir de n_0.

El acotamiento de la sucesión (s_n) nos dice que el siguiente conjunto A es no vacío y acotado superiormente.

$$A = \{s_n : n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}.$$

En virtud del Axioma del Supremo existe s, el supremo de A, que cumple para todo $n \geq n_0$, $s_n \leq s$.

Dado $\varepsilon > 0$ el real $s - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto A. Entonces, por definición de supremo existe $m_0 \geq n_0$ con $s - \varepsilon < s_{m_0}$.

El crecimiento de (s_n) implica que para todo $n \geq m_0$, se cumple que $s_{m_0} \leq s_n$.

Así, para todo $n \geq m_0$,

$$s - \varepsilon \leq s_n \leq s \leq s + \varepsilon.$$

Esto demuestra que (s_n) converge a s. $\square$

Aplicaciones

> **Ejemplo 10.8.**
> Como ya vimos la sucesión
>
> $$t_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)},$$
>
> es estrictamente decreciente y acotada inferiormente por 0. En virtud del Teorema de las Sucesiones Monótonas la sucesión converge.

Ejemplo 10.9.
Para la sucesión (s_n) definida anteriormente sabemos que es creciente y acotada superiormente. En virtud del Teorema de las Sucesiones Monótonas se concluye que (s_n) es convergente. Veremos que en este caso, la recurrencia

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n},$$

permite calcular $\ell = \lim s_n$.

Recordando un ejercicio de la semana pasada, sabemos que si $(s_n) \to \ell$ entonces $(s_{n+1}) \to \ell$ y $\left(\sqrt{2 + s_n}\right) \to \sqrt{2 + \ell}$. De este modo, se tiene la siguiente ecuación para ℓ.

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Esta ecuación tiene como única solución a $\ell = 2$. Se concluye que

$$(s_n) \to 2.$$

10.6 El número e

Como último ejemplo estudiaremos la sucesión (s_n) dada a continuación, que pertenece a la familia de sucesiones de la forma $((1 + h_n)^n)$, con $(h_n) \to 0$.

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- (s_n) **es creciente**

  Como $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ y $1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, al reemplazar s_{n+1} y s_n en $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ se obtiene

  $$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{(n+1)} \frac{(n+2)}{(n+1)}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

  La expresión $\frac{n}{n+1}\frac{(n+2)}{(n+1)}$ es igual a $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, que a su vez es igual a $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Entonces, podemos aplicar la desigualdad de Bernoulli, para $h = -\frac{1}{(n+1)^2}$ y obtener

  $$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

- (s_n) **es acotada superiormente**

  Como ya vimos que la sucesión es creciente, sabemos que $s_n \leq s_{2n}$. Usando la desigualdad de Bernoulli (III) para $u = \frac{1}{2n} \in \left(-1, \frac{1}{n}\right)$ obtenemos lo siguiente

  $$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - n\frac{1}{2n}} = 2.$$

De aquí, podemos concluir que

$$s_n \leq s_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq 4.$$

El Teorema de las Sucesiones Monótonas permite concluir que $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe.

Se define

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Recordando que (s_n) es creciente y rehaciendo la demostración de su acotamiento, se obtiene

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ 2 \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq e \leq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \leq 4.$$

El número e es conocido como el *número de Euler* y es aproximadamente $e \approx 2{,}718281828\ldots$.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. ☐ Sean (a_n) y (c_n) sucesiones nulas y (b_n) una sucesión tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Entonces, b_n es nula.

2. ☐ $\lim \frac{1}{2^n} = 0$.

3. ☐ $\lim(-\frac{3}{5})^n$ no existe.

4. ☐ $\lim 2^n = 1$.

5. ☐ $\lim(-3)^n = 0$.

6. ☐ $\lim n \dfrac{1}{2^n} = 0$.

7. ☐ $\lim \dfrac{n}{(1,00001)^n} = 0$.

8. ☐ $\lim \dfrac{n^{10^{10}}}{(1,000001)^n}$ no existe.

9. ☐ $\lim \left(\dfrac{2n+1}{3n+5}\right)^n = 1$.

10. ☐ $\lim \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ no existe.

11. ☐ $\lim \left(2 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ no existe.

12. ☐ $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ no existe.

13. ☐ $\lim \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n = 1$.

14. ☐ $\lim \left(1 - \dfrac{2x}{(n+x)(n+2)}\right)^n$ no existe.

15. ☐ $\lim \left(\dfrac{3n+2}{1-n}\right)^n = 1$.

16. ☐ $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{10}} = 2$.

17. ☐ $\lim \sqrt[n]{10^{10}} = 0$.

18. $\square$ $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{10} + \frac{1}{n^2}} = 1.$

19. $\square$ $\lim \sqrt[n]{10^{10} - \dfrac{1}{n^2}} = 1.$

20. $\square$ $\lim(1 + \dfrac{1}{n})^n$ no existe.

21. $\square$ $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{n^2}} = 1.$

22. $\square$ $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/n} = 1.$

23. $\square$ $\lim \left(\dfrac{n^8 - 7n^2 + 1}{3n^8 + 1}\right)^{1/n}$ no existe.

24. $\square$ Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

25. $\square$ Toda sucesión estrictamente decreciente y acotada inferiormente por cero, converge a cero.

26. $\square$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h > -1$ se cumple $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.

27. $\square$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h < 1$ se cumple $(1 - h)^n \geq 1 + nh$.

28. $\square$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h < 1$ se cumple $(1 - h)^n \geq 1 - nh$.

29. $\square$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h > 0$ se cumple $(1 + h)^n \geq 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$.

30. $\square$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $h \in \left(-1, \dfrac{1}{n}\right)$ se cumple $(1 + h)^n \leq \dfrac{1}{1 - nh}$.

Guía de Ejercicios

(1) Calcule

(a) $\lim \dfrac{a^n}{(n-1)^2}$, para a un real con $|a| < 1$.

(b) $\lim \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$ con $0 < a \leq b$.

(c) $\lim \left(\dfrac{2n-3}{3n+7}\right)^n$.

(d) $\lim \left(\dfrac{1-n^2}{5n^2+1}\right)^n$.

(e) $\lim \left(\dfrac{2\sqrt{n}+n}{\sqrt{n}-2n}\right)^n$.

(f) $\lim \dfrac{\sqrt[n]{a+b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

(g) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^2+1}{3n^3-1}}$.

(h) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{2}{n^n}}$.

(i) $\lim \sqrt[n]{n^3+n^2+n}$.

(j) $\lim \sqrt[n+1]{a^n}$, $a > 0$.

(k) $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b > 0$.

(l) $\lim \left(\dfrac{x^{-n}+y^{-n}}{2}\right)^{-1/n}$, $x > y > 0$.

(m) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n}\right) = \lim \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$

(n) $\lim \dfrac{a}{n}\left[\dfrac{n}{b}\right]$, para $a, b > 0$ y donde $[x]$ denota la parte entera de x.

(ñ) $\lim \left[\dfrac{1+n(-1)^n}{n^2}\right]$, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

(2) Demuestre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall h > 0 \quad (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

(3) Sea (a_n) una sucesión decreciente a partir de n_0 y acotada inferiormente. Demuestre que (a_n) converge.

(4) Determine si la sucesión definida por la recurrencia $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \geq 0$, posee límite, en cuyo caso, calcúlelo. Repita este ejercicio para la sucesión definida por $u_2 = 1$ y $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{4 + u_n^2}{2}}$, $n \geq 2$.

(5) Sea (h_n) una sucesión nula. Entonces, $\left(\dfrac{h_n}{1 - h_n}\right) \to 0$.

(6) Sea (v_n) con $v_n > 0$ y $\left(\dfrac{1}{v_n}\right) \to 0$. Entonces, $\left(\dfrac{1}{1 + v_n}\right) \to 0$.

Guía de Problemas

P1. (30 min.) Sea $u_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$. Calcule $\lim \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

P2. (30 min.) Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)$, donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.

P3. (30 min.) Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $\left(\dfrac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim \dfrac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.

P4. (30 min.) Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\dfrac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim (1-v_n)^n = 0$.

P5. (30 min.) Sea (u_n) una sucesión creciente. Pruebe que la sucesión definida por $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

P6. (30 min.) Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$. Demuestre que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos ℓ a este último límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq \ell \leq \dfrac{a+b}{2}$.

P7. (30 min.) Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

La función exponencial

Sabemos lo siguiente para la sucesión

$$a_n = (1 + h_n)^n$$

(1) Si $\lim h_n \in (-2, 0)$ entonces $\lim a_n = 0$.

(2) Si $\lim h_n \notin (-2, 0)$ entonces $\lim a_n$ no existe.

(3) Si $\lim h_n = 0$ y $\lim nh_n = 0$ entonces $\lim a_n = 1$.

(4) Si $\lim h_n = 0$, $h_n < 0$ y $\lim \dfrac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n = 0$.

(5) Si $\lim h_n = 0$, $h_n > 0$ y $\lim \dfrac{1}{nh_n} = 0$ entonces $\lim a_n$ no existe.

(6) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, donde e es un número mayor que 2 y menor que 4.

Ahora, veremos que usando un argumento similar al utilizado para $h_n = \dfrac{1}{n}$, es posible probar que para $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ es convergente.

Teorema 11.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión*

$$s_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge.

DEMOSTRACIÓN. Veremos que para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, la sucesión

$$s_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

es creciente a partir de $n_0 = [|-x|] + 1$, y que es acotada superiormente. Luego, usando el Teorema de las Sucesiones Monótonas, concluiremos que (s_n) converge.

La demostración se dividirá naturalmente dos partes: probar que es creciente y probar que es acotada superiormente.

(1) La sucesión (s_n) es creciente.

La demostración hace uso de las siguientes afirmaciones que son fáciles de verificar.

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} = 1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = 1+\frac{-\frac{x}{n(n+1)}}{\frac{n+x}{n}} = 1-\frac{x}{(n+1)\,(n+x)} \tag{11.1}$$

y para $n+x>0$

$$\frac{x}{(n+1)\,(n+x)} = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{n}{n+x}\right) < \frac{1}{n+1} < 1. \tag{11.2}$$

Para probar que (s_n) es creciente a partir de $n_0 = [|-x|]+1$, veremos que $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} \geq 1$, para $n \geq n_0$.

En efecto, al reemplazar los valores de s_{n+1} y de s_n en $\dfrac{s_{n+1}}{s_n}$ y aplicar (11.1) se obtiene que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}} = \left(1-\frac{x}{(n+1)\,(n+x)}\right)^{n+1}\left(\frac{n+x}{n}\right).$$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli (I) para $h = -\dfrac{x}{(n+1)\,(n+x)}$, que según (11.2) es >-1, se obtiene

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \left(1-\frac{x}{n+x}\right)\left(\frac{n+x}{n}\right) = 1.$$

(2) La sucesión (s_n) es acotada superiormente

Como ya hemos dicho, basta con probar que existen M y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$s_n \leq M.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x}{k}\right| < 1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\left|\dfrac{x}{kn}\right| < 1$, es decir, $\dfrac{x}{kn} \in \left(-1, \dfrac{1}{n}\right)$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli (III) para $a = \dfrac{x}{kn}$ tenemos que

$$\left(1+\frac{x}{kn}\right)^n \leq \frac{1}{1-n\frac{x}{kn}} = \left(\frac{k}{k-x}\right).$$

Ya vimos que la sucesión es creciente a partir de $n_0 = [|-x|]+1$. Entonces, para $n \geq n_0$, $s_n \leq s_{kn}$.

Tomando $M = \left(\dfrac{k}{k-x}\right)^k$ concluimos que para $n \geq n_0$

$$s_n \leq s_{kn} = \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} \leq \left(\frac{k}{k-x}\right)^k.$$

$\square$

Este resultado nos permite definir la función exponencial como sigue.

DEFINICIÓN La **función exponencial** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida mediante la expresión

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Debido al resultado anterior, vemos que la función exponencial está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Proposición 11.1. *El dominio de la función exponencial es* $\mathbb{R}$*.*

Propiedades de la función exponencial

De la definición, vemos fácilmente que $\exp(0) = 1$ y además, usando los resultados de la semana anterior, se tiene que $\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Con el siguiente resultado seremos capaces de obtener muchos otros valores de la función exponencial a partir del número e.

Proposición 11.2 (Producto de Exponenciales). *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y) .$$

DEMOSTRACIÓN. Como $1 + \dfrac{x+y}{n} = \dfrac{n+x+y}{n}$, $1 + \dfrac{x}{n} = \dfrac{n+x}{n}$ y $1 + \dfrac{y}{n} = \dfrac{n+y}{n}$ se tiene que

$$\frac{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+x+y)}{(n+x)(n+y)}\right)^n = \left(1 - \frac{xy}{(n+x)(n+y)}\right)^n \to 1.$$

La igualdad se obtiene mediante manipulaciones algebraicas y la convergencia que ya fue analizada la semana anterior. En el lado izquierdo podemos aplicar álgebra de límites para concluir que

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)} = 1.$$

$\square$

El resultado sobre el producto de exponenciales permite probar lo siguiente, cuya demostración se deja como ejercicio.

Proposición 11.3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene que*

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

El resultado anterior implica, en particular, que $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 11.4 (Acotamiento y Ceros). *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x) > 0.$$

En consecuencia, la función exponencial es acotada inferiormente y no tiene ceros.

Demostración. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$. Si $\exp(a) = 0$, para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces se obtiene la siguiente contradicción

$$1 = \exp(0) = \exp(a)\exp(-a) = 0.$$

□

Ahora veremos una desigualdad mucho más fuerte, que llamaremos *desigualdad fundamental de la función exponencial*, la que en particular implica que la función exponencial crece más "rápido" que una función lineal.

Proposición 11.5 (Desigualdad Fundamental). *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Demostración. Recordemos que la sucesión (s_n) definida por $s_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ es creciente a partir de $n_0 > -x$ y converge a $\exp(x)$. Entonces,

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0}.$$

Además, $\frac{x}{n_0} > -1$. Entonces

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0} \geq 1 + n_0\frac{x}{n_0} = 1 + x.$$

□

Propiedad 11.1. *Las siguientes propiedades son ciertas.*

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(2) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

(3) *Para $x < 1$,* $\exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Demostración. **(1)** La igualdad $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$ implica $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.

(2) La igualdad previa permite usar el producto de exponenciales convenientemente.

$$\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

(3) Para $x < 1$ se tiene que:

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x}.$$

$\square$

Proposición 11.6 (Crecimiento e Inyectividad). *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$x < y \implies \exp(x) < \exp(y).$$

En consecuencia, la función exponencial es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva.

Demostración. Usando el producto de exponenciales y la desigualdad $\exp(x) \geq 1+x$ se obtiene

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) \geq \exp(x)\cdot(1+(y-x)) > \exp(x),$$

ya que $y > x$ implica que $1+(y-x) > 1$. $\square$

La proposición anterior nos dice, en particular, que para todo $x > 0$, $\exp(x) > \exp(0) = 1$ y para todo $x < 0$, $\exp(x) < \exp(0) = 1$.

Proposición 11.7 (Función Exponencial y Exponentes). *Las siguientes propiedades son ciertas.*

(1) $\lim \exp(-n) = \lim \dfrac{1}{e^n} = 0.$

(2) *Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\exp\left(\dfrac{x}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(x)}$.*

(3) $\lim \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim \sqrt[n]{e} = 1.$

Demostración. **(1)** Notemos que $\exp(-n) = (\exp(-1))^n = \dfrac{1}{e^n}$. Entonces,

$$\lim \exp(-n) = \lim \frac{1}{e^n} = 0$$

ya que $e > 1$.

(2) El producto de exponenciales implica que

$$(\exp(x))^{\frac{1}{q}} = \left(\exp\left(q \cdot \frac{x}{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\exp\left(\frac{x}{q}\right)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} = \exp\left(\frac{x}{q}\right).$$

Con esto $\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)}$.

(3) Usando la propiedad anterior para $x = 1$, se tiene que

$$\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \exp\left(-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

$\square$

Observación: Notemos que el inciso **(2)** implica que $\exp(p/q) = e^{p/q}$, lo que finalmente puede extenderse a $\exp(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, para probar esto se necesitan argumentos que están fuera de los objetivos de este curso.

Proposición 11.8 (Biyectividad). *La función* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *es sobreyectiva.*

Demostración. Para $y > 0$ sean

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exp(x) \leq y\} \text{ y } s = \sup A.$$

Como $\lim \exp(-n) = 0$, existe n tal que $\exp(-n) < y$, luego $-n \in A$.

Del mismo modo, existe m tal que $\exp(-m) < \dfrac{1}{y}$ o sea, $\exp(m) > y$.

Se tiene que si $x > m$ entonces $\exp(x) > \exp(m) > y$. Luego m es cota superior de A. Concluimos que A es no vacío y acotado superiormente y, en virtud del Axioma del Supremo, posee supremo s.

Veamos ahora que $\exp(s) = y$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

- $s + \dfrac{1}{n} \notin A$ ya que es mayor que s. Con esto $\exp\left(s + \dfrac{1}{n}\right) > y$.
- $s - \dfrac{1}{n}$ no es cota superior de A ya que es menor que s. Con esto existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $s - \dfrac{1}{n} < x$ y $\exp(x) \leq y$.

- Luego, por la monotonía de la función exponencial, $\exp\left(s-\frac{1}{n}\right) < \exp(x) \leq y$.

Haciendo uso del producto de exponenciales, se obtiene que

$$\exp(s)\exp\left(-\frac{1}{n}\right) = \exp\left(s-\frac{1}{n}\right) < y < \exp\left(s+\frac{1}{n}\right) = \exp(s)\exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como sabemos que $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \exp\left(-\frac{1}{n}\right) = 1$, por el Teorema del Sandwich se concluye que $\exp(s) = y$. □

11.1 Función Logaritmo natural.

Definición (Logaritmo Natural) La función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es inyectiva y epiyectiva en consecuencia biyectiva. Su función inversa se llama **función logaritmo natural** o **de Neper** y se denota por

$$\begin{aligned} \ln : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x). \end{aligned}$$

Observación:

- Para todo $x \in (0,\infty)$, $\exp(\ln(x)) = x$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. En particular, $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$.
- La función ln es estrictamente creciente pues es la inversa de una función estrictamente creciente.
- El único cero de la función ln es 1.
- ln no es acotada ni superior ni inferiormente: $\ln((0,\infty)) = \mathbb{R}$.
- También se utiliza la notación $\log(x)$ para denotar el logaritmo natural de x.

Proposición 11.9 (Suma y diferencia de logaritmos). *Para todo $x, y > 0$,*

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) \;\; y \;\; \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Demostración. Sean $u = \ln(x)$ y $v = \ln(y)$. Al aplicar el producto de exponenciales

$$\ln(x) + \ln(y) = u + v = \ln(\exp(u+v)) = \ln(\exp(u)\exp(v)) = \ln(xy).$$

Del mismo modo

$$\ln(x) - \ln(y) = u - v = \ln(\exp(u-v)) = \ln\left(\frac{\exp(u)}{\exp(v)}\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

□

Al igual que para la función exponencial, existe una desigualdad fundamental para el logaritmo.

Proposición 11.10 (Desigualdad Fundamental). *Para todo $x > 0$ se tiene lo siguiente.*

(1) $\ln(x) \leq x - 1$.

(2) $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Demostración. La primera es directa al tomar $x = \exp(u)$ y aplicar la desigualdad $1 + u \leq \exp(u)$.

La segunda se obtiene de la primera al evaluar $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$ y recordar que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$. □

Para todo $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ las expresiones a^n, a^{-n} y $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ tienen un significado. Ahora, vamos a extender esta definición para a^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición (Definición de Exponente Irracional) Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define a^α como

$$a^\alpha := \exp(\alpha \ln a).$$

Observación: (Consistencia)

Como $\exp(n \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n$ y $\exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right) = (\exp(\ln(a)))^{1/n} = a^{1/n}$, la definición extiende a $\mathbb{R}$ el significado que habíamos asignado anteriormente a a^α.

Propiedad 11.2. *Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α.*

(1) $\forall a \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$.

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}$.

(4) $\forall \alpha, x \in \mathbb{R},\ (\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$, *en particular* $\exp(\alpha) = e^\alpha$.

(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

11.2 La función a^x

Definición Para $a > 0$ se define la función a^x por la fórmula

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Observación:

- La función $x \mapsto a^x$ tiene como dominio $\mathbb{R}$.
- Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función a^x es estrictamente monótona, en particular, es inyectiva.
  - Para $a \in (0,1)$, $\ln(a) < 0$. Entonces la función a^x es estrictamente decreciente.
  - Para $a > 1$, $\ln(a) > 0$. Entonces la función a^x es estrictamente creciente.
- Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es biyectiva: para todo $y \in (0, \infty)$, $x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$ satisface que $a^x = y$.

11.3 Logaritmos con base $a > 0$, $a \neq 1$.

Definición Sea $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$. Se define la función logaritmo en base a por

$$\log_a x := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Observación:

- La función $\log_a$ es estrictamente creciente si $a > 1$.
- La función $\log_a$ es estrictamente decreciente si $a \in (0,1)$.
- La función $\log_a$ es la inversa de la función a^x.

Propiedad 11.3 (Suma de Logaritmos).

(1) *Para todo* $x, y, a \in (0, \infty)$ *con* $a \neq 1$*, se cumple que*

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy).$$

(2) *(Cambio de base) Para todo* $x, a, b \in (0, \infty)$ *con* $a, b \neq 1$*, se cumple que*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Demostración. En el primer caso es suficiente con recordar la definición de $\log_b$ y usar la suma de logaritmos naturales para deducir que

$$\log_b(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} + \frac{\ln(y)}{\ln(b)} = \log_b(x) + \log_b(y).$$

En el segundo caso, usamos que

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \frac{1}{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

□

11.4 Límites exponenciales y logarítmicos

Proposición 11.11. *Sea* $(a_n) \to a$*, entonces*

(1) $(e^{a_n}) \to e^a$.

(2) $\left(\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a}\right) \to e^a$.

Demostración. **(1)** Si $a = 0$ entonces $1 + a_n \leq e^{a_n} \leq \dfrac{1}{1 - a_n}$ y los extremos convergen a 1. Entonces se tiene lo deseado. Además, $b_n = \dfrac{e^{a_n} - 1}{a_n}$ satisface $1 \leq b_n \leq \dfrac{\frac{1}{1-a_n} - 1}{a_n} = \dfrac{1}{1 - a_n}$. Entonces, (b_n) converge a 1.

Si $a \neq 0$ entonces la sucesión $(a_n - a)$ converge a cero. Aplicando lo ya demostrado obtenemos que $e^{a_n} = e^a e^{a_n - a} \to e^a$.

(2) Sea $b_n = \dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a}$. Notando que

$$b_n = \frac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} = e^a \left(\frac{e^{a_n - a} - 1}{a_n - a} \right),$$

usando lo recién visto se concluye que $(b_n) \to e^a$.

$\square$

Proposición 11.12. *Sea $(a_n) \to a$, con a_n y a positivos. Entonces*

(1) $(\ln a_n) \to \ln a$.

(2) $\left(\dfrac{\ln a_n - \ln a}{a_n - a} \right) \to \dfrac{1}{a}$.

Demostración.

(1) Si $a = 1$ entonces $1 - \dfrac{1}{a_n} \leq \ln a_n \leq a_n - 1$. Entonces, se tiene lo deseado usando el Teorema de Sandwich. Si $a \neq 1$, la sucesión $\left(\dfrac{a_n}{a} \right)$ converge a 1.

Para el caso general, se tiene que $\ln \left(\dfrac{a_n}{a} \right) \to 0$, es decir, $(\ln a_n) \to \ln(a)$.

(2) Supongamos que $a = 1$ y definamos $b_n = \frac{\ln(a_n)}{a_n - 1}$. Notemos que

$$\frac{1 - \frac{1}{a_n}}{a_n - 1} \leq b_n \leq \frac{a_n - 1}{a_n - 1} = 1 \quad \text{si } a_n > 1$$

y

$$\frac{1 - \frac{1}{a_n}}{a_n - 1} \geq b_n \geq \frac{a_n - 1}{a_n - 1} = 1 \quad \text{si } a_n < 1.$$

Como $\dfrac{1 - \frac{1}{a_n}}{a_n - 1} = \dfrac{1}{a_n}$, al juntar ambas desigualdades obtenemos que

$$\text{mín} \left\{ \frac{1}{a_n}, 1 \right\} \leq b_n \leq \text{máx} \left\{ 1, \frac{1}{a_n} \right\},$$

de donde se concluye que (b_n) converge a 1.

Si $a \neq 1$, entonces podemos escribir

$$b_n = \left(\frac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{\ln(\frac{a_n}{a})}{(\frac{a_n}{a} - 1)} \right),$$

de donde se concluye que $(b_n) \to \dfrac{1}{a}$.

$\square$

Observación:

- En el caso en que $(a_n) \to 0$, se cumple que $\exp(a_n) \to 1$ y $\ln(1 + a_n) \to 0$.
- En la primera parte de los teoremas anteriores vemos que el valor del límite sólo depende de a y no de la sucesión $(a_n) \to a$. Más aún, el valor del límite se obtiene al evaluar la función en a. Este fenómeno también ocurre para las funciones seno y coseno como ya vimos anteriormente, y se conoce como *continuidad*.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim \left(1 - \frac{x}{n}\right) = \exp(x)$.

2. $\square$ $\exp(0) = 0$.

3. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(2x) = 2\exp(x)$.

4. $\square$ $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right) = e^2$.

5. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

6. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.

7. $\square$ Existen x e y con $x < y$ y $\exp(x) \geq \exp(y)$.

8. $\square$ Existe x con $\exp(x) < 1 + x$.

9. $\square$ La ecuación $\exp(x) = \sqrt{2}$ tiene solución en $\mathbb{R}$.

10. $\square$ La ecuación $\exp(x) = -\sqrt{2}$ tiene solución en $\mathbb{R}$.

11. $\square$ El conjunto $\{\exp(x) : x \in \mathbb{R}\}$ es acotado superiormente.

12. $\square$ $\lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

13. $\square$ $\lim \exp(-n) = 0$.

14. $\square$ La expresión $\ln(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. $\square$ $\ln(e) = 0$.

16. $\square$ $\ln(1) = e$.

17. $\square$ $\ln(1) = 0$.

18. $\square$ $\ln(e) = 1$.

19. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

20. $\square$ Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

21. $\square$ Para todo $x, y \in (0, \infty)$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

22. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $\ln(x^{-1}) = (\ln(x))^{-1}$.

23. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $\ln(x) < x - 1$.

24. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $\ln(x) \leq x - 1$.

25. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $\ln(x) > 1 - \frac{1}{x}$.

26. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

27. $\square$ Para todo $a > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \exp(a \ln(x))$.

28. $\square$ Para todo $a > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \ln(a \exp(x))$.

29. $\square$ Para todo $a > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \exp(x \ln(a))$.

30. $\square$ Para todo $\alpha > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^\alpha = \exp(x \ln(a))$.

31. $\square$ Para todo $\alpha > 0$ y para todo $x \in (0, \infty)$, $x^\alpha = \exp(a \ln(x))$.

32. $\square$ Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, la función a^x es estrictamente creciente.

33. $\square$ Para todo $a > 1$ la función a^x es estrictamente decreciente.

34. $\square$ Para todo $a \in (0, 1)$ la función a^x es estrictamente decreciente.

35. $\square$ Para todo $a > 1$ la función $\log_a(x)$ es estrictamente creciente.

36. $\square$ Para todo $a \in (0, 1)$ la función $\log_a(x)$ es estrictamente decreciente.

37. $\square$ El dominio de la función $\log_a(x)$ es $\mathbb{R}$.

38. $\square$ Para todo $a, x > 0$, $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

39. $\square$ Para todo $a, b, x > 0$, $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

40. $\square$ Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

41. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$: $a^x \geq 0$.

42. $\square$ Para todo $a > 0$ la función $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ no es biyectiva.

43. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $a^{\log_a(x)} = x$.

44. $\square$ Para todo $a, x, y > 0$, $\log_a(xy) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

45. $\square$ $\lim \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

46. $\square$ Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ implica $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}.$

47. $\square$ Para todo $x \in (0, \infty)$, $-\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right).$

Guía de Ejercicios

(1) Dados $a, b, c > 0$, encuentre una solución $x > 0$ a la ecuación: $\log_x(a) + \log_{x^2}(b) = c$.

(2) Resuelva la ecuación $(\exp(x))^{10} = 2\exp(2x)$.

(3) Resuelva la ecuación $\exp(-x) = \exp(x)$.

(4) Resuelva la ecuación $\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}} = 0,5$.

(5) Encuentre todos los valores de x e y tales que $(x+y)^{\log_{10}(x+y)} = 1000(x+y)^2$ y $\dfrac{x}{y} \leq 1$.

(6) Sea (a_n) una sucesión que converge a a. Demuestre que para todo $b > 0$, $\lim b^{a_n} = b^a$. Recuerde que $b^x = \exp(x \ln(b))$.

(7) Sea (a_n) una sucesión que converge a $a > 0$. Demuestre que para todo $b \in \mathbb{R}$, $\lim a_n^b = a^b$.

(8) Calcule

$$\lim \frac{2^{\sqrt{\frac{2}{n}}} 3^{\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}}}{1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{2n+2}{3n+1}\right)^{\pi}}}.$$

(9) Calcule los siguientes límites para $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $a_n = -\dfrac{1}{n^2}$.

- **(a)** $\lim \dfrac{\exp(2a_n) - 1}{a_n}$.
- **(b)** $\lim \dfrac{\exp(-2a_n) - 1}{a_n}$.
- **(c)** $\lim \dfrac{a_n}{\ln(1 - a_n)}$.
- **(d)** $\lim \dfrac{\exp(-4a_n) - 1}{\ln(1 - 5a_n)}$.
- **(e)** $\lim (1 + 2a_n)^{\frac{1}{a_n}}$.

(10) Calcule $\lim(1 - \frac{1}{n^2})^{n\ln(6)}$ y $\lim(1 - \ln(e + \frac{1}{n^2}))n^2$.

(11) Resuelva la ecuación $3^x = (2^x)^x$.

(12) Sea $(a_n) \to a$ con $a_n \neq a$. Calcule $\lim \dfrac{e^{a_n} - e^{a}}{a_n - a}$.

(13) Sea $(a_n) \to a$ con $a_n \neq a$. Calcule $\lim \dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a}$.

Guía de Problemas

P1. Calcule
$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

P2. Demuestre que $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

P3. Para $x > 0$, calcule $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

P4. Calcule $\lim (1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a cero.

P5. Las tasas de interés en tres instituciones son $6\,\%$ anual, $0,5\,\%$ mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)\,\%$ cada cinco a nos, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco a nos, para los siguientes valores de α: 0, 1 y $\ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interés es $t\,\%$ entonces, el capital aumenta en ese periodo en un factor $(1 + t/100)$.

P6. Para la función $f(x) = \ln(1 + e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para que valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

SEMANA 12 y 13:

Límite de Funciones

12.1 Introducción

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{si } x > 0, \\ 1 - x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

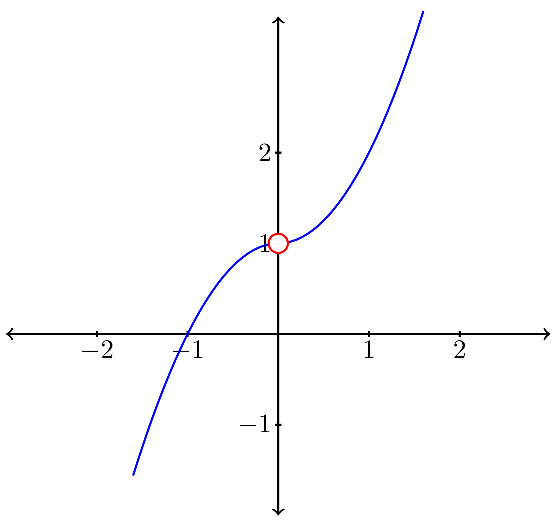


Figura 32: Ejemplo de función con límite 1 cuando $x \to 0$.

Podemos ver en la Figura 32, que esta función no está definida en $\overline{x} = 0$. Sin embargo, se observa que cuando se consideran valores de x cercanos a cero, pero distintos de 0, los valores de $f(x)$ se aproximan al real $\ell = 1$. Por lo tanto, nos gustaría decir que cuando x tiende a $\overline{x} = 0$, los valores de $f(x)$ tienden a $\ell = 1$.

Para formalizar el concepto de "tender a $\overline{x}$" o de "aproximarse a $\overline{x}$" haremos uso de sucesiones (x_n) que convergen a $\overline{x}$. Sin embargo, como en general el real $\overline{x}$ no necesariamente pertenecerá al dominio de la función considerada (notar que justamente, en este ejemplo, $\overline{x} = 0$ no pertenece al dominio de f, que es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), no siempre es posible encontrar aquellas sucesiones que converjan a $\overline{x}$ cuyos valores x_n estén en el dominio de la función.

Para poder asegurar que estas sucesiones existen, introduciremos primeramente la noción de *punto de acumulación* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN (PUNTO DE ACUMULACIÓN) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. Decimos que $\overline{x} \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación de** A si existe alguna sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que

- $x_n \neq \overline{x}$ para todo $n \geq n_0$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y
- $x_n \to \overline{x}$.

El conjunto de los puntos de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ se denota A'.

Observación: En general $A \not\subseteq A'$. Por ejemplo si $A = (0,1) \cup \{2\}$, $A' = [0,1]$.

12.2 Definición del límite de funciones

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\overline{x} \in A'$ un punto de acumulación de A. Diremos que f tiende a $\ell \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\overline{x}$ si para toda sucesión $(x_n) \subseteq A$ que converge a $\overline{x}$ y tal que $x_n \neq \overline{x}$, se cumple que $\lim f(x_n) = \ell$.

En este caso, diremos que ℓ es el **límite de** $f(x)$ **cuando** $x \to \overline{x}$, lo que se denotará por $\ell = \lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$.

Observación:

- Si $\overline{x} \notin A'$ entonces no existen sucesiones (x_n) con valores en $A \setminus \{\overline{x}\}$ convergentes a $\overline{x}$. Luego, no puede estudiarse el límite de la función cuando $x \to \overline{x}$. En consecuencia, en ese caso se dirá que tal límite no existe. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x} = \nexists$$

ya que la función $\sqrt{x}$ no está definida para los reales negativos.

- Si $\overline{x} \in A'$, entonces el concepto de límite de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$ está bien definido, sin embargo, este límite puede o no existir.

Ejemplo 12.1.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x}$ no existe, ya que $-1 \notin (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})'$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe ya que, por ejemplo, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ pero $\frac{1}{x_n} = n$ no converge.

12.3 Propiedades del límite de una función

Como la definición de límite de funciones se apoya en la de límite de sucesiones, se pueden probar en forma sencilla los siguientes resultados.

Teorema 12.1. *Si una función f tiene límite cuando $x \to \overline{x}$ entonces dicho límite es único.*

DEMOSTRACIÓN. Sean ℓ_1 y ℓ_2 límites de $f(x)$ cuando $x \to \overline{x}$. Sea entonces (x_n) alguna sucesión con valores en el dominio de la función f y convergente a $\overline{x}$. Entonces por definición de límite se tiene que la sucesión $(f(x_n))$ es convergente a ℓ_1 y a ℓ_2 simultáneamente. Por lo tanto, en virtud de la unicidad del límite *de sucesiones* se tiene que $\ell_1 = \ell_2$. □

Teorema 12.2 (Álgebra de límites). *Sean f y g dos funciones y sea $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x\to\overline{x}} g(x) = \ell_2$. Entonces:*

(1) *Si $\overline{x} \in (\mathrm{Dom}(f))' \cap (\mathrm{Dom}(g))'$, entonces se tiene que:*

- **(a)** $\lim_{x\to\overline{x}} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.
- **(b)** $\lim_{x\to\overline{x}} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2$.
- **(c)** $\lim_{x\to\overline{x}} (fg)(x) = \ell_1\ell_2$.

(1) *Si $\overline{x} \in (\mathrm{Dom}(f/g))'$ y $\ell_2 \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x\to\overline{x}} (f/g)(x) = \ell_1/\ell_2$$

(1) *En particular (cuando g es constante) se tiene que $\lim_{x\to\overline{x}} (\alpha f)(x) = \alpha\ell_1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Observación: Consecuencias directas del teorema anterior son que si $x \to \overline{x}$, entonces:

(1) $x^2 \to \overline{x}^2$.

(2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x^k \to \overline{x}^k$.

(3) Para todo $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$,

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \to a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0.$$

(4) Si $b_m, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$ son tales que $b_m \overline{x}^m + \cdots + b_1 \overline{x} + b_0 \neq 0$, entonces

$$\frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \to \frac{a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0}{b_m \overline{x}^m + \cdots + b_1 \overline{x} + b_0}.$$

Lo siguiente que queremos enunciar es un Teorema del Sandwich para el límite de funciones. Supongamos que tenemos tres funciones de variable real f, g, h y queremos estudiar el límite cuando $x \to \bar{x}$. Lo primero que necesitamos entonces es que $\bar{x}$ sea un punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Dom}(g)$, y $\mathrm{Dom}(h)$, para así poder tomar sucesiones $(x_n) \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$ tales que $x_n \to \bar{x}$. Segundo, necesitamos que

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \tag{12.1}$$

para n suficientemente grande y que $\lim f(x_n) = \lim h(x_n) = \ell$, para así concluir que $\lim g(x_n) = \ell$. Para que se cumpla (12.1) para cualquier sucesión (x_n) que tomemos tendiendo a $\bar{x}$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en una vecindad en torno a $\bar{x}$. Formalmente, esto se enuncia como sigue.

Teorema 12.3 (Sandwich de funciones). *Sean f, g y h tres funciones y sea $\overline{x} \in (\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h))'$. Si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)) \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

y además $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x) = \lim\limits_{x \to \overline{x}} h(x) = \ell$, entonces $\lim\limits_{x \to \overline{x}} g(x) = \ell$.

Ejemplo 12.2 (Aplicación del teorema del Sandwich).
Usaremos el teorema del Sandwich de funciones para calcular el siguiente límite emblemático:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Solución

El dominio de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego claramente 0 es punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f)$.

La desigualdad que usaremos del capítulo de trigonometría es la siguiente: se tiene que para $|x| < \frac{\pi}{2}$, se cumple:

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{sen}|x| \leq \sqrt{2 - 2\cos|x|} \leq |x| \leq \tan|x|.$$

De aquí, dividiendo por $|x|$, despejando cos y usando las paridades de las funciones sen y cos, se deduce que

$$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$

Usando que las funciones 1 y $1 - \dfrac{x^2}{2}$ tienden a 1 cuando $x \to 0$, el teorema del Sandwich permite concluir que

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Supongamos que f y g son dos funciones tales que $f \circ g$ está bien definida. El siguiente resultado nos dice cómo calcular el límite de la composición $f \circ g$, cuando x tiende a $\overline{x} \in (\mathrm{Dom}(f \circ g))'$.

Teorema 12.4 (Límite de una composición). *Sean f, g dos funciones tales que $Im(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, y sea $\bar{x} \in (\mathrm{Dom}(f \circ g))'$. Supongamos que*

(1) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} g(x) = l$,

(2) $\lim\limits_{y \to l} f(y) = L$.

Entonces,

$$\lim_{x \to \overline{x}} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to l} f(y) = L.$$

Observación: La técnica anterior se suele usar como un teorema de cambio de variables. Para visualizar mejor esto último, consideremos el siguiente proceso:

(1) Escribimos
$$\lim_{x \to \overline{x}} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to \overline{x}} g(f(x))$$

(2) Hacemos el cambio $u = f(x)$ y calculamos $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$.

(3) Si sabemos que $u \to \overline{u}$ cuando $x \to \overline{u}$, intentamos establecer la igualdad:

$$\lim_{x \to \overline{x}} g(f(x)) \quad \text{“} = \text{”} \quad \lim_{u \to \overline{u}} g(u)$$

(4) Para concluir, hay que calcular el último límite. Si logramos hacerlo y vale ℓ, entonces el cálculo habrá concluido y la igualdad que escribimos entre comillas será cierta en virtud del teorema del límite de la composición.

Notemos que si el último límite no existiera, la igualdad que escribimos entre comillas podría ser falsa, ya que en tal caso estaríamos fuera del contexto del teorema.

Ejemplo 12.3.
Usemos la técnica anterior para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Solución

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos x = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\tfrac{x}{2}) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\tfrac{x}{2}),$$

tendremos que

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Luego, usando los teoremas de álgebra de límite, el límite que debemos calcular se escribe así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2.$$

Aquí vemos que basta con hacer el cambio de variables definido por $u = \frac{x}{2}$, ya que si $x \to 0$ se tiene que $u \to 0$ por lo tanto todo depende del límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2 \quad \text{“}=\text{”} \quad \frac{1}{2}\left(\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)^2.$$

Como este último límite existe y es conocido, se deduce que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

12.4 Límites Importantes - Funciones continuas

A continuación revisaremos una lista de cálculos de límites sencillos que nos permitirán, mediante la combinación de los teoremas anteriores, calcular otros límites más complejos. Primeramente comenzamos con aquellos límites que se calculan por simple evaluación en $\overline{x}$, es decir, aquellos que cumplen $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$.

Para poder enunciar esto, primero necesitaremos definir el concepto de *punto interior* del dominio, como se define a continuación.

DEFINICIÓN Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que x_0 es un **punto interior** de $\mathrm{Dom}(f)$, lo que denotaremos por $x_0 \in \mathtt{Int}\,\mathrm{Dom}(f)$, si existe $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Con la definición de punto interior, ya podemos definir el concepto de *continuidad*, que se verá someramente en este curso y se profundizará en el siguiente curso.

DEFINICIÓN Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es **continua** en un punto $x_0 \in \mathtt{Int}\,\mathrm{Dom}(f)$ si se satisface que:

(1) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teorema 12.5. *Los siguientes límites son conocidos.*

(1) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} c = c$.

(2) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} x = \overline{x}$.

(3) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0$.

(4) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n \overline{x}^n + \cdots + a_1 \overline{x} + a_0}{b_m \overline{x}^m + \cdots + b_1 \overline{x} + b_0}$.

(5) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\overline{x}}$.

(6) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \overline{x}$.

(7) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \cos x = \cos \overline{x}$.

(8) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \arcsin x = \arcsin \overline{x}$.

(9) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} e^x = e^{\overline{x}}$.

(10) $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \ln x = \ln \overline{x}$.

No debemos olvidar que en varios de los ejemplos anteriores $\overline{x}$ debe estar en el correspondiente dominio de la función, que no es necesariamente todo $\mathbb{R}$. Por ejemplo, para el logaritmo necesitamos que $\overline{x} > 0$.

Límites trigonométricos, logarítmicos y exponenciales

Usando el teorema del sandwich y desigualdades conocidas para las respectivas funciones, se establecen las existencias de los siguientes límites importantes fuera de los dominios de las respectivas funciones:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

Se espera que cualquier persona que pase satisfactoriamente por un curso de Cálculo, recuerde siempre los valores de estos límites, ya que sirven de base para muchos cálculos más complejos.

Ejercicio 12.1: Como aplicación directa de los límites básicos y los teoremas de cálculo se pueden calcular los siguientes límites:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})}.$

(6) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).$

12.5 Límite a través de un subconjunto del dominio

Consideremos la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{si } x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}.\end{cases}.$$

Para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nos gustaría poder tomar por separado los casos $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ y $x\in\mathbb{Q}$, de modo de aprovechar que ya sabemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

En principio, el hacer esta separación consistiría en tomar sucesiones racionales o irracionales por separado. Sin embargo, la definición nos exige tomar **todas** las sucesiones que convergen a cero (en el dominio de la función), de entre las cuales hay algunas extrañas que son similares a la sucesión $s_n=\dfrac{1+\sqrt{2}+(-1)^n\sqrt{2}}{n}$, la cual tiene la propiedad de tender a cero, tomando valores racionales e irracionales en forma alternada.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente desarrollar una herramienta que separe el dominio en partes. Por ese motivo, comencemos por introducir la siguiente definición.

Definición (Límite de una función a través de un subconjunto) Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, y sean $B\subseteq A$ y $\overline{x}\in B'$. Diremos que $\ell\in\mathbb{R}$ es el límite de la función f cuando $x\to\overline{x}$ a través del conjunto B si para cualquier sucesión $(x_n)\subset B$ convergente a $\overline{x}$, $x_n\neq\overline{x}$, se tiene que la sucesión $\lim f(x_n)=\ell$.

Si este límite existe, lo denotaremos por $\ell=\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x}\\ x\in B}} f(x)$

Ejemplo 12.4.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{I}}}\cos x=1$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}\cos x=1$.

(2) si $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ \operatorname{sen} x & \text{si } x\in\mathbb{I}\end{cases}$. Entonces $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=1$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{I}}} f(x)=0$.

Respecto a la definición anterior, podemos demostrar un primer teorema que nos enseña qué pasa cuando el límite "normal" de una función existe.

Teorema 12.6. *Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}, \ell \in \mathbb{R}$ son tales que que $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell$, entonces para cualquier subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\overline{x} \in B'$ se tiene que $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} f(x) = \ell$.*

Observación: A pesar de que la hipótesis del teorema anterior es muy fuerte (existencia del límite global), podemos usar el contra recíproco para establecer las siguientes consecuencias: Si $B, C \subseteq A$ y $\overline{x} \in B'$ y $\overline{x} \in C'$ entonces:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} f(x)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$ no existe.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in C}} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x)$ no existe.

Ejemplo 12.5.
Consideremos la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ y estudiemos el límite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

1. Estudiemos primeramente el caso $x > 0$. Claramente, si $x > 0$ se tiene que $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

2. Si ahora consideramos el caso $x < 0$ tenemos que $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$. Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Como ambos límites son diferentes, se concluye que no existe el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

A continuación, enunciaremos el teorema que nos permite validar matemáticamente la idea que teníamos en el ejercicio de motivación a este tema, es decir, calcular primero los límites a través de conjuntos apropiados y concluir sobre el límite global.

Teorema 12.7. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A'$. Sean $B, C \subseteq A$ tales que $\overline{x} \in B'$, $\overline{x} \in C'$ y $B \cup C = A$.*

Si $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in C}} f(x) = \ell$ entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell.$$

12.6 Límites laterales

En principio, los límites laterales de una función son un caso particular de límite a través de un subconjunto de su dominio. Sin embargo, la técnica de estudiar los límites laterales de una función es tan usada, que merece revisar las consecuencias de este cálculo particular.

DEFINICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si denotamos por $A^+ = A \cap (\overline{x}, +\infty)$ y $A^- = A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

- Se llama límite lateral por la derecha de la función f en $\overline{x}$ a $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^+}} f(x)$.
- Análogamente, a $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in A^-}} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda de la función f en $\overline{x}$.

El límite lateral por la derecha se denota por $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x > \overline{x}}} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to \overline{x}^+} f(x)$ y el limite lateral por la izquierda se denota por $\lim\limits_{\substack{x \to \overline{x} \\ x < \overline{x}}} f(x)$ o bien por $\lim\limits_{x \to \overline{x}^-} f(x)$.

Observación: Usando los resultados teóricos de la sección de límites a través de subconjuntos del dominio de una función, se deduce que si $\overline{x} \in (A^+)' \cap (A^-)'$ y $\overline{x} \notin A$ entonces se tiene que

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell.$$

En el caso en que $\overline{x} \in A$ la equivalencia es la siguiente

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \ell = f(\overline{x}).$$

Esta última equivalencia es muy popular y se enuncia informal y frecuentemente diciendo que una función es *continua* cuando sus límites laterales son iguales a $f(\overline{x})$.

12.7 Caracterización de límite sin uso de sucesiones

A continuación, enunciaremos un teorema que caracteriza completamente la noción de límite cambiando el rol de las sucesiones por el de las letras griegas ε y δ. En la jerga del tema se conoce esta caracterización como la definición ε-δ del límite y en muchos textos, suele ser tomada como el punto de partida del estudio de límites.

Teorema 12.8 (Caracterización ε-δ de límite). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x}$ punto de acumulación de A entonces*

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap ([\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La caracterización ε-δ de los límites laterales es análoga, realizando el cambio que corresponde a exigir que sólo se consideran los valores de x de un lado de $\overline{x}$, es decir:

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$ entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$ entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}), \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Observación: La frase $\forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \setminus \{\overline{x}\}$ que aparece en la caracterización, suele ser escrita usando una implicancia. De este modo, se escribe:

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \left[0 < |x - \overline{x}| \leq \delta \implies \big|f(x) - \ell\big| \leq \varepsilon\right].$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Límites infinitos y hacia el infinito

En la sección anterior hemos definido el límite de una función cuando $x \to \overline{x}$ o bien cuando x se aproxima a $\overline{x}$ por uno de los costados. Para que estas definiciones fueran coherentes, el punto $\overline{x}$ debía ser adherente al dominio de la función. En esta sección, extenderemos el concepto de límite al caso en que la variable $x \to +\infty$ o bien decrece hacia $-\infty$. Para que las definiciones de esta sección sean coherentes, necesitaremos considerar funciones con dominios no acotados.

Es interesante notar que en el capítulo de sucesiones, las sucesiones eran funciones con dominio $\mathbb{N}$, el cual no es acotado superiormente. Allí, la variable n se movía de hacia infinito ($n \to +\infty$). Por ese motivo, veremos que esta sección es muy similar a la de sucesiones, desde la definición de límite hasta los teoremas de unicidad, álgebra y Sandwich. Muchas de las demostraciones son copia directa de las correspondientes en sucesiones.

13.1 Límites hacia $\pm\infty$

Definición Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea ℓ un real fijo.

- Si A no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

- Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

Analicemos un poco la definición de límite cuando $x \to \infty$. Nos dice que tomando x lo suficientemente grande ($x \ge m$), la distancia entre $f(x)$ y l se hace tan pequeña como uno quiera ($|f(x) - l| \le \varepsilon$). En las Figuras 33 y 34 , se pueden ver ejemplos de funciones con límites hacia $\pm\infty$.

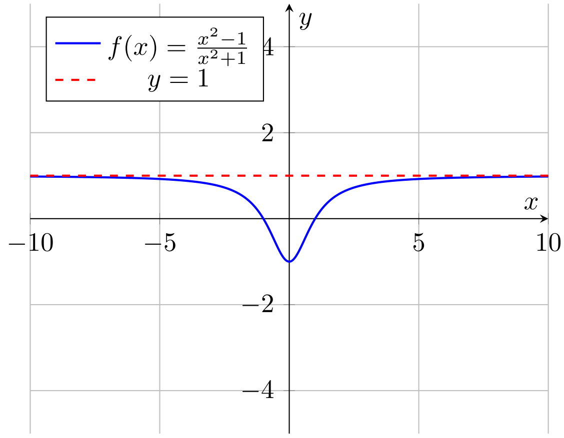


Figura 33: Ejemplo de una función con límite cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

Ejemplo 13.1.
Probemos que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$.
Solución: Sea $\varepsilon > 0$, buscamos $m > 0$ (m una constante que dependa de ε) tal que para todo $x \geq m$, se satisfaga

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 \right| \leq \varepsilon. \tag{13.1}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 \right| \leq \varepsilon \quad &\iff \quad \left| \frac{2}{x^2+1} \right| \leq \varepsilon, && \text{desarrollando la resta,}\\
&\iff \quad \frac{2}{\varepsilon} - 1 \leq x^2, && \text{despejando x,}\\
&\iff \quad x \leq -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \quad \text{o} \quad \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \leq x.
\end{aligned}$$

Como estamos tomando $x \to +\infty$, basta con tomar $m = \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} - 1}$. De esta manera, para todo $x \geq m$, se cumple (13.1).

Es fácil ver que la analogía con la definición de límite de sucesiones implica que los teoremas de unicidad del límite, álgebra de límites, Sandwich y límites importantes siguen siendo válidos en límite de funciones cuando $x \to \pm\infty$.

En particular,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \nexists & \text{si } n > m \end{cases}.$$

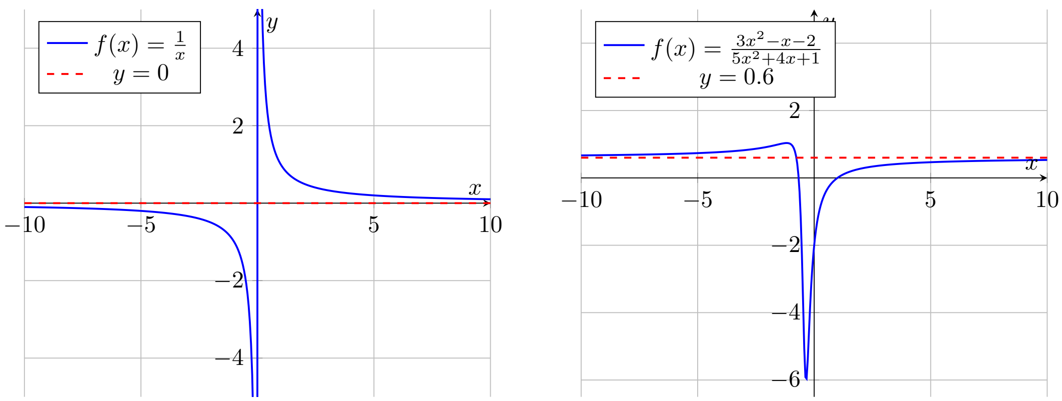


Figura 34: Más ejemplos de funciones y sus límites.

Observación: Para el caso cuando $x \to -\infty$, observamos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x),$$

por lo tanto las propiedades de estos límites son análogas a las de $x \to +\infty$. En otras palabras, también se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \nexists & \text{si } n > m \end{cases}.$$

Teorema 13.1 (Unicidad del límite). *Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2,$$

entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema 13.2 (Álgebra). *Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell_2$ y $A \cap B$ es no acotado superiormente, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \qquad \text{si } \ell_2 \neq 0.$$

Teorema 13.3 (Sandwich). *Si tres funciones f, g, h con dominios A, B, C respectivamente son tales que $\exists m$, tal que $\forall x \in B \cap [m, \infty)$ se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Entonces, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell$, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \ell$.*

Demostración. Las demostraciones son realmente análogas a las realizadas en sucesiones y se proponen como ejercicio. Además se propone como ejercicio, enunciar y demostrar estos tres teoremas para el caso en que $x \to -\infty$. $\square$

Ejemplo 13.2.
Calcular los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

Razonamiento formal:

Antes de resolver el problema hagamos un razonamiento puramente formal y sin mayor justificación: Observamos que cuando $x \to +\infty$ se tiene que $1/x \to 0$ y por lo tanto $e^{\frac{1}{x}} \to e^0 = 1$. De este modo, el segundo límite es el producto de una función no acotada (x) multiplicada por una que converge a cero ($e^{\frac{1}{x}} - 1$).

Solución:

Usamos la desigualdad de la exponencial de modo que si $x > 1$ se tiene que

$$\frac{1}{x} + 1 \leq e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

De aquí, vemos que cuando $x \to +\infty$, las dos cotas convergen a 1. Por lo tanto, usando Sandwich de funciones se concluye $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Para el segundo límite, usamos la misma desigualdad, restando 1 y multiplicando por x. De este modo se tiene que

$$1 \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Aquí, nuevamente usando Sandwich, se obtiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$.

Asíntotas (I)

Cuando una función tiene límite ℓ hacia $\pm\infty$, su gráfico se aproxima hacia la recta $y = \ell$. Por esta razón, esta recta se llama asíntota horizontal de f. Más precisamente se tiene la siguiente definición

> **Definición (Asíntotas horizontales)**
>
> - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$ entonces la recta $y = \ell_1$ se llama asíntota horizontal de f.
> - Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$ entonces la recta $y = \ell_2$ es otra asíntota horizontal de f.

Observación: Notemos que una función con dominio no acotado hacia $\pm\infty$ puede tener dos asíntotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$ como se puede ver en el ejemplo de la Figura 35.

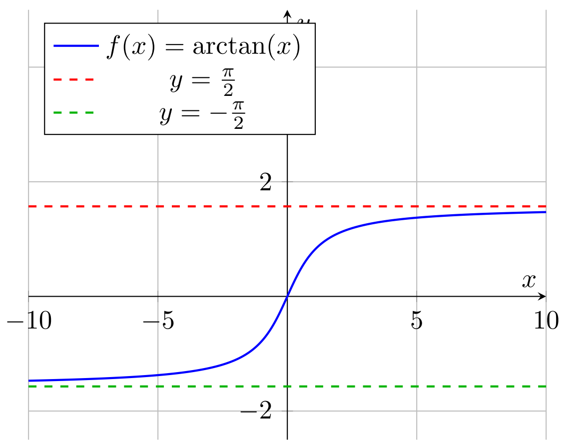


Figura 35: Ejemplo de asíntotas horizontales diferentes cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

En muchos casos, estas asíntotas coinciden, como por ejemplo en las funciones racionales. Veamos el siguiente caso particular: La función $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

13.2 Límites infinitos

Cuando una función crece sin cota al aproximarse a $\overline{x}$, por la derecha o la izquierda o cuando $x \to \pm\infty$ se dice que su límite es $+\infty$. Las definiciones formales de estos conceptos son las siguientes:

Definición (Límites igual a $+\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Si $\overline{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta], f(x) \geq M.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumuluación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta], \quad f(x) \geq M.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}), \quad f(x) \geq M.$$

- Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad f(x) \geq M.$$

- Si A no es acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad f(x) \geq M.$$

Observación: Es importante notar que todas estas definiciones son muy similares, con cambios sutiles, pero fundamentales, que marcan la diferencia entre uno y otro límite. En este punto es de suma importancia haber adquirido una comprensión adecuada del rol de cada una de las variables y de los cuantificadores que las acompañan, para saber de cual límite se está hablando.

A continuación definiremos cuándo el límite de una función es igual a $-\infty$ (en los cinco casos de la definición anterior). Sin embargo, es un buen ejercicio de aprendizaje intentar escribir estas cinco definiciones sin mirar el párrafo siguiente y sólo leerlo para corroborar que lo escrito es correcto.

Definición (Límites igual a $-\infty$) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Si $\overline{x} \in A'$, entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta],\ f(x) \leq M.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (\overline{x}, +\infty)$, entonces

$$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists\delta > 0, \forall x \in A \cap (\overline{x}, \overline{x} + \delta], \quad f(x) \leq M.$$

- Si $\overline{x}$ es punto de acumulación de $A \cap (-\infty, \overline{x})$, entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap [\overline{x} - \delta, \overline{x}), \quad f(x) \leq M.$$

- Si A no es acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in A \cap [m, \infty), \quad f(x) \leq M.$$

- Si A no es acotado inferiormente entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M < 0,\ \exists m < 0,\ \forall x \in A \cap (-\infty, m], \quad f(x) \leq M.$$

Observación: Notemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to +\infty} -f(-x) = +\infty$$

Es decir, los límites cuando $x \to \pm\infty$ o con valor $-\infty$ pueden ser derivados del concepto $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ mediante cambios algebraicos apropiados.

Observación:

- Cuando una función tiene límite igual a $+\infty$ o igual a $-\infty$ se suele decir que posee límite en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ definido como

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

  que suele llamarse $\mathbb{R}$-extendido.

- Como las sucesiones son funciones, las definiciones anteriores permiten establecer el significado de las frases $s_n \to +\infty$ y $s_n \to -\infty$.

Propiedad 13.1.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Demostración. En efecto, si recordamos las definiciones se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad f(x) \geq M, \\
&\iff \forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{M}, \\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \varepsilon, \\
&\implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m, +\infty), \quad -\varepsilon \leq \frac{1}{f(x)} \leq \varepsilon, \\
&\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.
\end{aligned}$$

□

Propiedad 13.2. *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *y, además,* $\exists m$ *tal que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(g) \cap [m, \infty)$*, entonces* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Demostración. Sabemos que

(1) $\forall M > 0,\ \exists m' > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap [m', \infty),\ f(x) \geq M$

(2) $\exists m > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(g) \cap [m, \infty),\ f(x) \leq g(x)$

Debemos probar que:

$$\forall M > 0,\ \exists m'' > 0,\ \forall x \in \mathrm{Dom}(g) \cap [m'', \infty), \quad g(x) \geq M.$$

Esta última proposición es verdadera, ya que si $M > 0$ es arbitrario, de **(1)** se deduce la existencia de $m' > 0$, a partir del cual se cumple $f(x) \geq M$. De **(2)** se deduce que existe $m > 0$ a partir del cual se cumple $f(x) \leq g(x)$. Tomando $m'' = \max\{m, m'\}$ se tendrá que $m'' > 0$ y además

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(g) \cap [m'', \infty), \quad g(x) \geq f(x) \geq M.$$

Esto es lo que se quería demostrar. □

Ejemplo 13.3.

(1) Probar usando la definición que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Solución: Se debe demostrar que: $\forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \geq m,\ f(x) = x \geq M$. Esta proposición es cierta, ya que basta tomar $m = M$.

(2) Probar usando el inciso (1) que $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Solución: En este caso, basta con observar que

$$\lim_{x\to-\infty} x = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$

(3) Probar que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Solución: En este caso basta con usar la cota

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exp(x) \geq 1 + x \geq x.$$

Como $x \to +\infty$, usando el ejemplo 3 se tiene que $\exp(x) \to +\infty$.

(4) Combinando los ejemplos anteriores,

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

(5) Probar que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Solución: Para este ejemplo usaremos la definición, es decir, probaremos que:

$$\forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \geq m, \quad \ln(x) \geq M.$$

Para ello, veamos que

$$\ln(x) \geq M \iff x \geq \exp(M)$$

por lo tanto, dado $M > 0$ arbitrario, basta tomar $m = \exp(M)$ y se cumplirá que si $x \geq m$ entonces $\ln(x) \geq M$.

Asíntotas (II)

Cuando una función tiende a $\pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$, es posible que su gráfico se aproxime a una recta oblicua. En este caso la recta se llama *asíntota oblicua* de la función. La definición precisa de este concepto es la siguiente:

Definición (Asíntotas oblicuas)

- La recta $y = m_1x + n_1$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to +\infty$ si se cumple que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (m_1x + n_1) = 0.$$
- Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (m_2x + n_2) = 0$ entonces la recta $y = m_2x + n_2$ es una asíntota oblicua de f cuando $x \to -\infty$.

Observación: Para calcular las constantes m, n de una eventual asíntota oblicua podemos observar que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+n) = 0 &\iff n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx,\\
&\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-mx}{x} = 0,\\
&\iff m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Este razonamiento entrega dos fórmulas para calcular m y n

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx.$$

Si ambos límites existen (en particular el segundo) entonces $y = mx+n$ es definitivamente una asíntota oblicua de f.

El mismo cálculo se puede realizar cuando $x \to -\infty$.

Ejemplo 13.4.
Encontrar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Solución. Estudiemos la función $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$. Ya hemos visto anteriormente que esta función tiende a 1 si $x \to +\infty$. También esto ocurre si $x \to -\infty$ [propuesto]. Por lo tanto $m = 1$.

Ahora estudiamos la expresión $f(x) - mx = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$. También hemos estudiado este límite y se concluye que $n = 1$.

Por lo tanto, esta función tiene como asíntota oblicua a la recta $y = x+1$ cuando $x \to \pm\infty$.

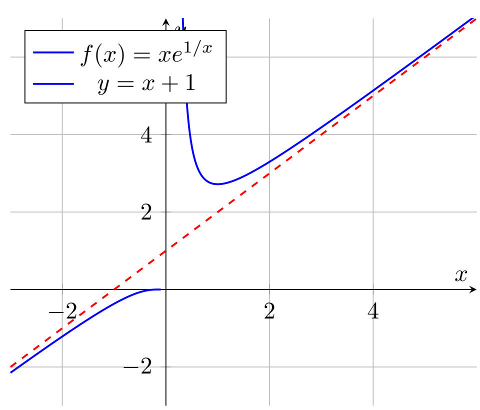


Figura 36: Gráfico de la función estudiada en el Ejemplo 13.4.

Definición (Asíntotas verticales) Si $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = \overline{x}$ es una asíntota vertical de f.

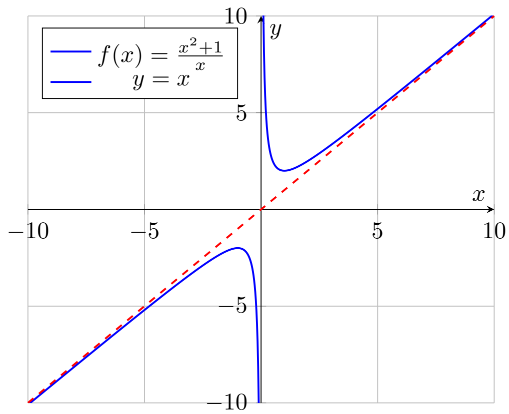


Figura 37: Ejemplo de asíntotas oblicuas y verticales.

Teorema de composición (I)

Teorema 13.4. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.*

Entonces, si el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente, se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Observación: En general, la existencia de los dos límites por separado no garantiza que el dominio de la composición no sea acotado, en efecto, si por ejemplo si $A = B = \mathbb{Q}$ y $g(x) = x\sqrt{2}$, entonces $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{0\}$.

Por esta razón, en el teorema se ha agregado la hipótesis "el dominio de la composición $f \circ g$ no es acotado superiormente"

Demostración. Sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, es decir que

(1) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0, \quad \forall x \in A \cap [m, \infty)\ \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

(2) $\forall M > 0,\ \exists m' > 0,\ \forall x \in B \cap [m', +\infty)\ g(x) \geq M$

Debemos demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} (f \circ g)(x) = \ell$, es decir, si llamamos $C = \mathrm{Dom}(f \circ g)$, debemos probar:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists m'' > 0, \quad \forall x \in C \cap [m'', \infty) \quad |(f \circ g)(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Antes de comenzar la demostración, recordemos la definición de $C = \mathrm{Dom}(f \circ g)$:

$$C = \{x \in B : g(x) \in A\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, usando el dato **(1)** sabemos que existe $m > 0$, para el cual se cumple

$$\forall z \in A \cap [m, \infty) \quad |f(z) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Usando ahora el dato **(2)** en el caso particular en que $M = m$, se tiene que existe $m' > 0$ de modo que

$$\forall x \in B \cap [m', \infty), \quad g(x) \geq m.$$

Por lo tanto, $\forall x \in C \cap [m', \infty)$ podemos realizar lo siguiente:

(i) $x \in B \cap [m', +\infty)$, de donde se deduce que $g(x) \geq m$.

(ii) Como $x \in C$ se cumple además que $g(x) \in A$, es decir $z = g(x) \in A \cap [m, \infty)$, se donde se concluye que

$$|f(g(x)) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Con esto concluye la demostración con $m'' = m'$.

$\square$

Ejemplo 13.5.
En la semana de sucesiones se estudio la sucesión $s_n = a^n$, encontrándose que el límite dependía del valor de a.

Ahora en funciones estudiemos la función $f(x) = a^x$ donde $a > 0$.

Sabemos que por definición, se cumple

$$f(x) = \exp(x \ln a).$$

Luego, para calcular el límite cuando $x \to +\infty$ hacemos el cambio de variable (uso del teorema de la composición) $u = x \ln a$. Sabemos que

$$\lim_{x \to +\infty} u = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1, \\ -\infty, & \text{si } a < 1, \\ 0, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, el límite requerido será igual a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{u \to +\infty} \exp(u), & \text{si } a > 1, \\ \lim\limits_{u \to -\infty} \exp(u), & \text{si } a < 1, \\ 1, & \text{si } a = 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1, \\ 0, & \text{si } a < 1, \\ 1, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 1, \\ 0, & \text{si } a < 1, \\ 1, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Ejemplo 13.6.
Otra sucesión interesante es $s_n = na^n$ cuando $|a| < 1$.

Ahora en funciones estudiemos la función $f(x) = xa^x$ donde $a \in (0,1)$ cuando $x \to +\infty$.

Sabemos que por definición, se cumple

$$f(x) = x \exp(x \ln a) = \frac{x}{\exp(-x \ln a)}.$$

Aquí, tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$. Por esta razón, necesitamos una desigualdad donde se compare la exponencial con las potencias de x cuando $x \to +\infty$.

Una primera desigualdad es

$$\exp u \geq 1 + u,$$

pero aquí la cota es lineal en u. Una desigualdad más fuerte cuando $u > 0$ es la siguiente

$$\exp u = \left(\exp \frac{u}{2}\right)^2 \geq (1 + \frac{u}{2})^2 = 1 + u + \frac{u^2}{2} \geq \frac{u^2}{2}.$$

Con esta desigualdad podemos decir que, para $u = -x \ln a > 0$ se tiene que

$$0 \leq \frac{x}{\exp(-x \ln a)} \leq \frac{2x}{x^2 \ln^2 a}.$$

Por lo tanto, usando Sandwich se concluye que $\lim\limits_{x\to+\infty} xa^x = 0$, cuando $a \in (0,1)$.

Como casos particulares se concluye que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \qquad \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

(En el último, se usa el cambio de variable $x = \ln u$ para transformarlo en el primero).

¿Puede cortarse una asíntota horizontal?

En muchos ejemplos se observa que los gráficos de las funciones se aproximan a sus asíntotas horizontales en forma asintótica sin cortarlas. O sea $f(x) \to \ell$ cuando $x \to +\infty$ pero no ocurre que $f(x) = \ell$.

Esto que ocurre en algunos ejemplos no es una generalidad, como lo muestra la función

$f(x) = \operatorname{sen} x/x$ que tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, y cumple con $f(x) = 0$ para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

A pesar de esto el caso en que la función no corta a su asíntota es útil para las aplicaciones que siguen.

Un caso particular es el de la función $\dfrac{1}{x}$. En este caso sabemos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Pero, podemos ser más precisos y ver que cuando $x > 0$ se tiene que $\dfrac{1}{x} > 0$ y que cuando $x < 0$ se tiene que $\dfrac{1}{x} < 0$.

Desde el punto de vista gráfico, esto dice que $\dfrac{1}{x}$ se aproxima a la recta $y = 0$ por arriba (cuando $x \to +\infty$) y por abajo (cuando $x \to -\infty$).

Para enfatizar este comportamiento diremos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$

Esta notación se puede precisar más en la siguiente definición

Definición (Límite igual a ℓ^+ o ℓ^-)

- Diremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$ si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \exists m > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom}(f) \cap [m, +\infty),\ f(x) > \ell.$$

- Diremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell^-$ si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \exists m > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom}(f) \cap [m, +\infty),\ f(x) < \ell.$$

- Análogamente se definen los límites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell^+$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell^-$.

Observación: Con las definiciones anteriores, vemos que la definición de límite se puede escribir en al menos 25 formas distintas, combinando el hecho que la variable x puede tender a $\overline{x}$, $\overline{x}^+$, $\overline{x}^-$, $+\infty$ o $-\infty$ y la función f puede tender a ℓ, ℓ^+, ℓ^- o bien a $\pm\infty$.

Ejemplo 13.7.
Analicemos las asíntotas de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2-1}}$.

Solución El dominio de la función es $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Como $f(x)$ es par basta estudiar su comportamiento solamente en el intervalo $(1,\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$, tenemos que $x=1$, es una asíntota vertical y como f es par entonces la recta $x=-1$ también es una asíntota vertical.

Veamos ahora las asíntotas en ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4-x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}}=1=m.$$

Por otro lado tenemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}-x.$$

Desarrollemos un poco la última expresión

$$\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}-x=\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}-\sqrt{\frac{x^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)}}=\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}}.$$

Multipliquemos la última expresión por $1=\dfrac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}}=\frac{x^4+1-x^4+x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}\right)}$$
$$=\frac{1+x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4-x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}.$$

Si tomamos el límite cuando $x\to\infty$ a la última expresión obtendremos $\left(\dfrac{1}{\infty\cdot 2}\right)\to 0$. Por lo tanto $n=0$.

Con esto la asíntota oblicua será $y=x$.

Un gráfico de esta función se muestra en la siguiente figura:

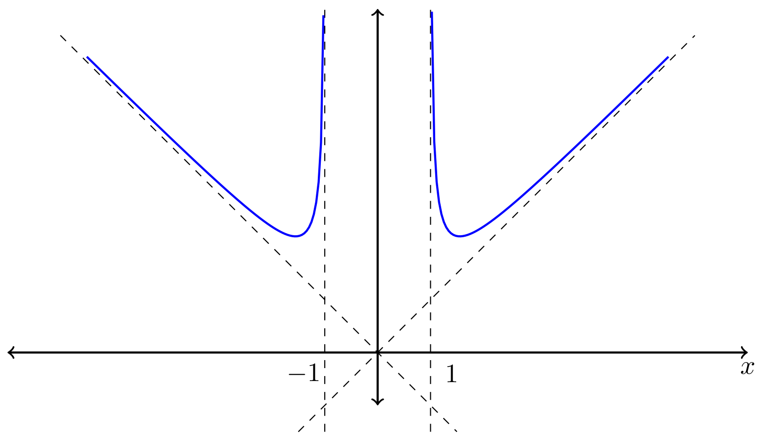


Figura 38: Gráfico de la función estudiada en el Ejemplo 13.7

Guía de Ejercicios

(1) Demuestre que

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell$.

(b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0} (f(x)-\ell) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to 0} f(x^3) = \ell$.

(d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(|x|)$.

(f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^2)$.

(2) Sean a, x_0, b tales que $a < x_0 < b$ y f una función cuyo dominio incluye al conjunto $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. Demuestre que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

(3) Defina los conceptos correspondientes a los símbolos siguientes.

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

(d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

(e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$.

(f) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$.

(4) Calcule los siguientes límites

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x-3}$.

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-a-b}{x^2-a^2}$.

(d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$.

(e) $\lim_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x}{a}\right] \dfrac{b}{x}$.

(f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

(g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}}$.

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

(i) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

(5) Estudie si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, para $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}, & \text{si } x > 1, \\ \dfrac{2x^2-3}{x^2+3}, & \text{si } x < 1. \end{cases}$

(6) Calcule las asíntotas oblicuas para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x}$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$.

(c) $f(x) = (1-e^{-x})(mx+n)$.

(7) Estudie la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$.

(8) Usando la caracterización $(\epsilon - \delta)$ del límite, demuestre que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{5}{x-2} = 5$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \tfrac{1}{4}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0$.

(9) Estudie las asíntotas y límites importantes para las siguientes funciones: $f(x) = e^{-1} + xe^{1/x}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ y $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2-1}}$.

(10) Calcule los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x-3}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + e^x - \sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+\cos(x)}}}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}(1-x)$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1+\frac{1}{|x|}}\right) - \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right)$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{\ln(-x)}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

(ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x}$.

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\tan(x^2)}$.

(11) Calcule los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{x}$.

(i) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}}$.

(j) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(k) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x)}-1}{x-\pi}$.

(l) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(12) Determine el valor de c, si se sabe que: $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x} = 4$.

(13) Estudie si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}, & x>1, \\ \\ \dfrac{2x^2-3}{x^2+3}, & x<1. \end{cases}$

(14) Calcule asíntotas de todo tipo para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$.

(c) $f(x) = (1-e^{-x})(2x+5)$.

(d) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Guía de Problemas

P1. (30 min.) Demuestre que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas oblicuas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

P2. (30 min.) Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, demuestre que el dominio A de f permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ si y sólo si existe al menos una sucesión (s_n) en A que cumple $s_n \to x_0$ y $s_n > x_0,\ \forall n$.

Use este resultado para estudiar si en los siguientes casos, los dominios de las funciones permiten o no estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$

(a) $A = (x_0, x_0 + 1)$.

(b) $A = \left\{x_0 + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $A = \left\{x_0 + \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) $A = \left\{x_0 + \frac{m+n}{mn};\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(e) $A = (x_0, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$.

(f) $A = \mathbb{Q}$.

(g) $A = \left\{x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right);\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

P3. (30 min.) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Usando la definición de límite cuando $x \to +\infty$, demuestre que

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \max\{f(x), \ell\} = \ell$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} = \ell^+$.

P4. (30 min.)Demuestre que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad

$$\text{(P)} \qquad \exists L > 0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la propiedad (P) pero la función $f(x) = x^2$ no.

P5. (20 min.) Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Pruebe que

(a) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

(b) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ si (q_n) es una sucesión que converge a x_0 tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ q_n > x_0$, entonces $\lim f(q_n) = f(x_0)$.

(c) Para todo $q \in \mathbb{Q}$ se cumple $f(q) = qf(1)$.
Indicación: pruebe por inducción la fórmula para $q \in \mathbb{N}$, y luego extiéndala a $q \in \mathbb{Z}$ y $q = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$.

(d) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $f(x_0) = x_0 f(1)$.
Indicación: use la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$.

P6. (30 min.) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2).$$

(a) Muestre que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

(b) Pruebe que si g es una función acotada entonces $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(c) Pruebe que si

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a).$$

P7. Calcule los siguientes límites, si es que existen.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi))$.

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{\ln(1 + x)}$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x}$.

P8. Determine la existencia de $\lim\limits_{x \to x_0} [x]x$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

P9. Sea f una función tal que $f(x) \geq 1$ para todo $x \geq 0$ y $f(x) \leq 0$ para todo $x < 0$. Determine cuales de los siguientes límites nunca pueden existir: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

P10. Determine para qué valores de a el siguiente límite existe: $\lim\limits_{x \to 0} |x|^a (1 - e^x) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

P11. Calcule $\lim_{v \to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(v)}{v}$, demostrando que para todo $v \in [0,1]$, $0 \leq \operatorname{arc\,sen}(v) \leq \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ y aplicando el Teorema del Sandwich.

P12. Usando la definición de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Para $\varepsilon > 0$, escoja $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Recuerde que arctan es creciente y acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$.

P13. Calcule todas las asíntotas de la siguiente función y determine si $\lim_{x \to 0}$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x), & x \leq 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)}, & 0 < x < 1, \\ 1 & x = 1 \\ \dfrac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 1 < x. \end{cases}$$

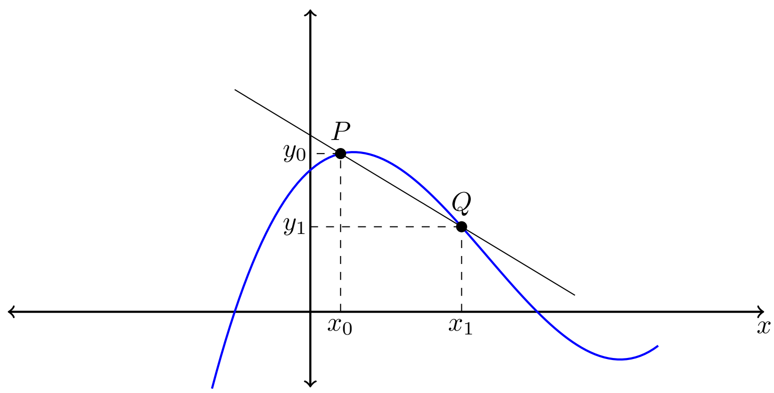
P14. Sea f una función tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ y sea $g(x) = \operatorname{sen}(x) f(x)$. Demuestre que si $\ell = 0$ entonces $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ y que si $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ existe entonces $\ell = 0$.

P15. Demuestre que para todo polinomio $p(x)$ se cumple que $\lim_{x \to +\infty} p(x) e^{-x} = 0$.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Derivadas

Consideremos el gráfico de una función f con dominio $\mathbb{R}$. Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto del gráfico de f y sea $Q = (x_1, y_1)$ un punto *móvil* por el gráfico de f.



La ecuación de la recta secante que pasa por P y Q es:

$$y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Si consideramos el caso límite cuando $x_1 \to x_0$, en la Figura 39 se puede observar cómo la recta secante se trasforma en la recta tangente al gráfico de f que pasa por P, y su ecuación es:

$$y - y_0 = \left[\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0).$$

De existir el límite entre corchetes, éste se denomina *derivada de la función f en x_0* y representa a la *pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0*.

¿Podría no existir la derivada de una función f en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$? Hay dos casos en los que la derivada no existe que vale la pena remarcar:

(1) Si no es posible tomar el límite $x \to x_0$ a través del conjunto $\mathrm{Dom}(f)$. Por ejemplo, si $\mathrm{Dom}(f) = [x_0, \infty)$, entonces se cumple que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ pero el dominio de la función no contiene los puntos a la izquierda de x_0. Por lo tanto, no sería posible tomar $x \to x_0^-$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Es decir, es necesario que $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ y que f esté definida *en un entorno de x_0*.

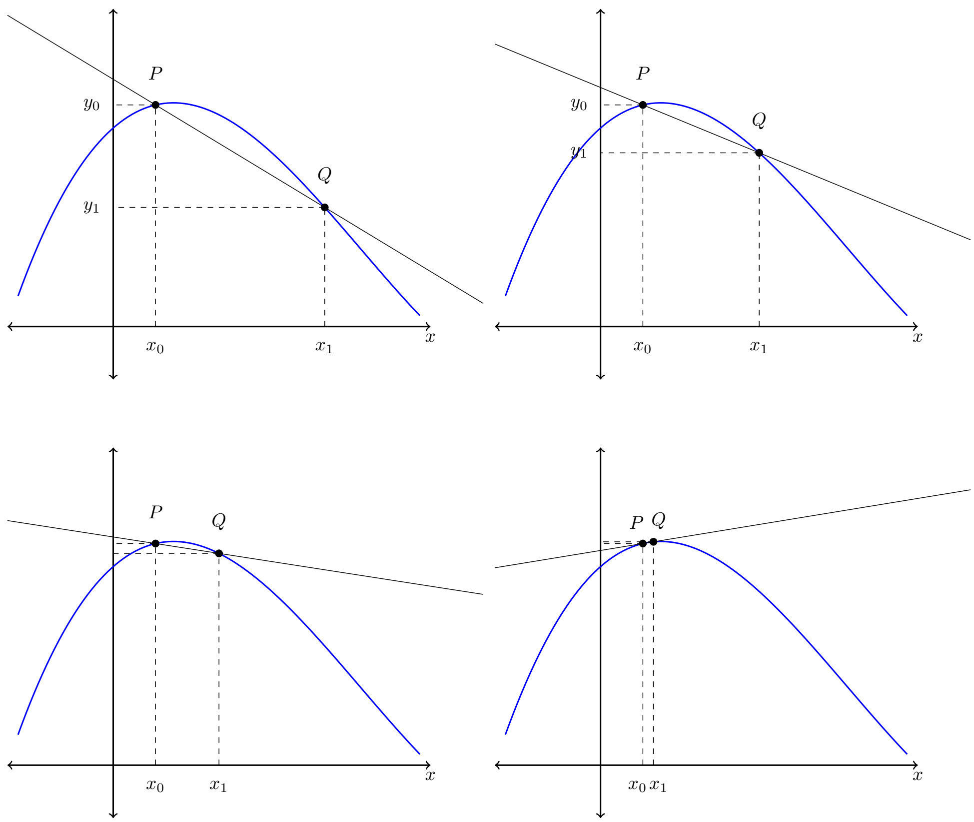


Figura 39: Secante que pasa por los puntos P y Q a medida que $x_1 \to x_0$.

Solución: Para evitar complicaciones, sólo estudiaremos la derivada de funciones en puntos x_0 que estén completamente incluidos en el dominio de f y que satisfagan la relación

$$\exists \delta > 0, \text{ tal que } \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathrm{Dom}(f).$$

Los puntos que satisfacen esta propiedad se llamarán **puntos interiores al domino de** f y los anotaremos diciendo que $x_0 \in \mathtt{Int}\mathrm{Dom}(f)$.

(2) La derivada de una función f en un punto x_0 no existe si f "pega un salto" en x_0, como se puede ver en la Figura 40.

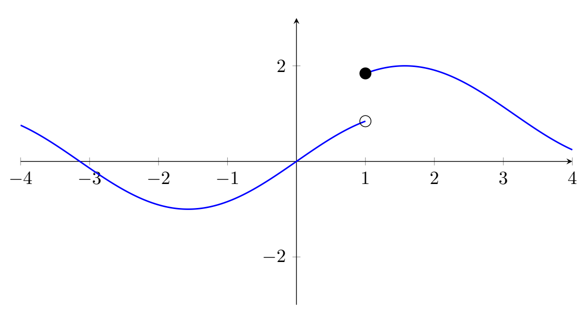


Figura 40: Ejemplo de una función discontinua.

Solución: Para evitar este problema, asumiremos que la función es *continua*[8].

14.1 Función Diferenciable en x_0

Definición (Función diferenciable en un punto) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que f es **derivable** o **diferenciable** en $x_0 \in \mathtt{Int}A$ si y sólo si el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe.

En tal caso, el valor del límite se denominará **derivada de** f **en** x_0 y se denotará por $f'(x_0)$.

Ejemplo 14.1.
(1) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{[\sqrt{4+h}+\sqrt{4}]}{[\sqrt{4+h}+\sqrt{4}]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h[\sqrt{4+h}+\sqrt{4}]} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \nexists$$

Observación: Notemos que: f diferenciable en $x_0 \implies f$ continua en x_0.
O, equivalentemente, f no es continua $x_0 \implies f$ no es diferenciable en x_0.

Demostración. En efecto, si f es diferenciable en $x_0 \in \mathtt{Int}\,\mathrm{Dom}(f)$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

Como $f'(x_0)$ existe, podemos escribir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f'(x_0) \lim_{x\to x_0}(x-x_0) + f(x_0) = f(x_0).$$

Por lo tanto, probamos que f es continua en x_0. $\square$

[8] La definición de continuidad se vio en la Subsección 12.4

La recíproca no es cierta. Esto es, existen funciones continuas en un punto pero no diferenciables.

Ejemplo 14.2.
Consideremos $f(x) = |x|$. Se tiene que

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

y, por lo tanto, es continua en $x = 0$. Analicemos si es diferenciable en $x = 0$.

$$\text{i) } x_0 > 0 \implies f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = 1,$$

$$\text{ii) } x_0 < 0 \implies f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = -1,$$

$$\text{iii) } x_0 = 0 \implies f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \to 0^+ \\ -1 & \text{si } h \to 0^- \end{cases} = \nexists.$$

14.2 Función Derivada

Definición (Función derivada) Sea f una función, entonces la función tal que: $x \to f'(x)$ se llama **función derivada** de f y se denota por f'.

Observación:

- Si $y = f(x)$ entonces f' suele denotarse también como $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$ o $\dfrac{df(x)}{dx}$. Las dos últimas notaciones se llaman notación de Leibnitz.
- El dominio de f y f' no necesariamente coinciden, por ejemplo:

  Si $f(x) = |x|$ entonces $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  En general se cumple $\operatorname{Dom} f' \subseteq \operatorname{Dom} f$.

14.3 Cálculo de algunas derivadas

(1) $f(x) = c =$, constante con respecto a x. Entonces $f'(x) = 0$.

(2) $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Pero por el Binomio de Newton tenemos que $(x+h)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

(3) $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n} \right] = -\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \cdot \frac{1}{(x+h)^n x^n} \\ &= -nx^{n-1} \frac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$f'(x) = (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

(4) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}.$$

Sean $a = \sqrt[n]{x}$, $k = \sqrt[n]{x+h} - a$ entonces $h = (a+k)^n - a^n$. Con esto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+.h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{(a+k)^n - a^n}.$$

Si definimos $g(x) = x^n$, entonces vemos que

$$\lim_{k\to 0} \frac{k}{(a+k)^n - a^n} = \frac{1}{g'(a)}.$$

Entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n} a^{1-n}.$$

Reemplazando el valor de a en la expresión anterior, obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{x})^{(1-n)} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Luego

$$f'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{x})^{(1-n)}.$$

Si $x > 0$ también puede escribirse

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

(5) $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

(6) $f(x) = \exp x = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \left[\frac{e^h - 1}{h}\right] s = e^x.$$

Luego,

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

(7) $f(x) = x^\alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} x^\alpha \left[\frac{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}\right] \\ &= x^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{\exp\left(\alpha \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)\right) - 1}{h} \\ &= x^\alpha \lim_{h\to 0} \left[\frac{\exp\left(\alpha \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)\right) - 1}{\alpha \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}\right] \left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\right] \frac{\alpha}{x} \end{aligned}$$

Pero conocemos los siguientes límites: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Con esto obtendremos

$$f'(x) = x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Luego,
$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(8) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right] \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Luego,
$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

(9) $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. Queda como ejercicio.

14.4 Álgebra de derivadas

Teorema 14.1 (Álgebra de derivadas). *Si f y g son diferenciables en x y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces, $f \pm g$, αf, fg y f/g con $g(x) \neq 0$ son también diferenciables en x y, además,:*

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

(3) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Demostración.

(1) Empezaremos trabajando con la definición de derivada de la función $f + g$:

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Ahora, como sabemos que f y g son diferenciables en x, en particular, sabemos que los límites
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

existen. En otras palabras, esto nos dice que podemos escribir el límite de la suma como la suma de los límites, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x) \pm g'(x) \\ &= (f' \pm g')(x).\end{aligned}$$

(2) Se tiene que

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(x+h)-(\alpha f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h} \\ &= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f'(x) = (\alpha f')(x).\end{aligned}$$

(3) De nuevo, usando la definición de derivada,

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x).}{h}\end{aligned}$$

Sumando y restando $f(x)g(x+h)$ en el numerador, obtenemos

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot f(x) \right).\end{aligned}$$

Igual que antes, como f y g son diferenciables, sabemos que los límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

existen. Más aun, como g es diferenciable, también es continua. En otras palabras,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

Si separamos en dos límites, obtendremos el resultado final

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) f(x) \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).\end{aligned}$$

(4) Se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} \pm \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{g(x+h)} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{1}{h} \left(\frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right).\end{aligned}$$

Si calculamos la resta de fracciones del segundo término, tenemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x+h)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)}{g(x)g(x+h)}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right).$$

Equivalentemente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x+h)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)}{g(x)g(x+h)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right).$$

Ahora, para asegurarnos de poder escribir el límite de la suma como la suma de los límites, es importante comprobar que cada límite existe. Primero, sabemos que $g(x)$ es continua (porque g es diferenciable), entonces $\lim\limits_{g(x+h)}$ existe. Por lo tanto, como $g(x) \neq 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Además, sabemos que f es diferenciable, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f'(x)}{g(x)}.$$

De la misma forma, como g es diferenciable,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)g(x+h)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&\quad = \frac{f(x)}{g(x)}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x+h)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$\square$

Ejemplo 14.3.

(1) Sea $f(x) = x^2(3x+1)$, calculemos su derivada. Llamaremos $u(x) = x^2$ y $v(x) = 3x+1$. Entonces, aplicando la regla del producto,

$$f'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{14.1}$$

Sabemos que $u'(x) = (x^2)' = 2x$. Usando la regla de la suma, podemos calcular

$$v'(x) = (3x+1)' = (3x) + (1)' = 3 + 0 = 3.$$

Volviendo a (14.1), concluimos

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(3x+1) + 3x^2.$$

Simplificando,

$$f'(x) = 9x^2 + 2x.$$

(2) Sea $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Se cumple que:

$$u'(x) = \left(x^2+1\right)' = \left(x^2\right)' + (1)' = 2x \quad \text{y} \quad v'(x) = (x)' = 1.$$

Para calcular la derivada de f, aplicando la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(2x)(x) - (x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Corolario 14.1. *Si f es diferenciable en x, entonces $1/f$ con $f(x) \neq 0$ es también diferenciable en x:*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Ejemplo 14.4.

(1) $(\tan x)' = \sec^2 x$.

(2) $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

(3) $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(4) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

14.5 Derivada de una composición de funciones

Teorema 14.2. *Sea f diferenciable en x_0 y sea g diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y además se cumple que*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Demostración. Como f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en y_0, los siguientes límites existen:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{y} \quad g'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k}.$$

Consideremos el cociente incremental de la composición. Sumando y restando convenientemente, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} &= \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}\\ &= \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\end{aligned}\tag{14.2}$$

siempre que $f(x_0+h)\neq f(x_0)$.

Sea

$$k = f(x_0+h)-f(x_0).$$

Cuando $h\to 0$, se tiene $k\to 0$ porque f es continua en x_0 (al ser diferenciable).

Entonces,

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}.$$

Tomando límite cuando $h\to 0$, obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = g'(y_0).$$

Por otro lado,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Con esto, volviendo a la ecuación (14.2), concluimos que el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h}$$

existe, ya que es producto de límites que existen. Más aun, se tiene que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\\ &= g'(y_0)\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

□

Observación: En aplicaciones físicas o de otro tipo, comúnmente las variables tienen significado, como tiempo, masa, volumen, densidad, etc.

En estos casos suele tenerse lo siguiente:

Sean x, u, v tres variables que se encuentran relacionadas del siguiente modo:

$$u = f(x) \text{ y } v = g(u) = (g\circ f)(x).$$

En estos casos, el teorema de la derivada de una composición suele escribirse así

$$\frac{dv}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Es decir

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Por esta razón, el teorema de la derivada de una composición suele llamarse *Regla de la Cadena*.

Ejemplo 14.5.
(1)

$$\frac{d}{dx}\left((x^2-1)^2\right) = 2(x^2-1) \cdot 2x.$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2+\sqrt{1+\cos^2 x}}\\ &\quad = \frac{1}{3}(x^2+\sqrt{1+\cos^2 x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left\{2x + \frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)\right\}.\end{aligned}$$

(3)

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(4)

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a.$$

(5)

$$\frac{d}{dx}x^x = x^x[\ln x + 1].$$

(6)

$$\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)}[v'(x)\ln u(x) + v(x)^{u'(x)}u(x).$$

14.6 Derivada de la función inversa

Proposición 14.1. *Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ una función monótona y biyectiva. Si f es diferenciable en $x_0 \in (a,b)$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y además*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Observación: $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$, luego usando la notación de Leibnitz podemos escribir lo siguiente:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \text{ o bien } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}.$$

Ejemplo 14.6.

(1) $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14.7 Aplicaciones de la derivada

La primera aplicación de la derivada es la proveniente de la definición, es decir, obtener rectas tangentes a curvas definidas por la regla $y = f(x)$. De este modo, si f es diferenciable en el punto x_0 la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$ y así:

$$L_T : \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es la ecuación de la recta tangente.

Además, si $f'(x_0) \neq 0$, la ecuación de la recta normal es

$$L_N : \qquad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Aplicación física

Consideremos una partícula P que se mueve sobre una curva $\mathcal{C}$. Si llamamos $s(t)$ a la función que define la distancia del punto P a un punto fijo O de la curva, a lo largo de la curva, en función del tiempo, se tiene que entre dos instantes sucesivos t_1 y t_2 la partícula habrá recorrido una distancia neta dada por

$$s(t_2) - s(t_1).$$

Si se divide esta distancia por el tiempo empleado por la partícula para moverse $(t_2 - t_1)$ se habrá calculado la velocidad media de la partícula entre estos dos instantes. Es decir,

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Si la función s fuera diferenciable en el instante t_1, en la expresión anterior se puede calcular el límite cuando $t_2 \to t_1$ obteniéndose así, la velocidad instantánea de la partícula en ese instante. Es decir

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t_1).$$

De este modo se puede dar una nueva interpretación a la derivada de una función, diciendo que representa la velocidad instantánea de una partícula.

En estricto rigor, en nuestro cálculo hemos obtenido lo que los físicos llaman la rapidez instantánea, ya que en física se reserva la palabra velocidad para la derivada del vector posición de una partícula y resulta ser un vector (más detalles al respecto corresponden al curso de física correspondiente).

Si la función $v(t)$ fuese conocida para todo t, podríamos repetir nuestro razonamiento diciendo que entre dos instantes sucesivos t_1y t_2 la diferencia de velocidad dividida por el tiempo transcurrido es la aceleración media de la partícula. Es decir

$$a_m(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Así, tomando el límite cuando $t_2 \to t_1$, si la función v es derivable, se obtiene la aceleración instantánea de la partícula. Es decir

$$a(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = v'(t_1).$$

De este modo, tenemos otra interpretación de la derivada.

En estricto rigor, como sólo hemos derivado la rapidez, hemos obtenido la aceleración tangencial de la partícula. En el curso de Física se verá que al derivar el vector velocidad, aparece una aceleración normal que es igual a $\frac{v^2}{\rho}$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria. Por ejemplo, en un movimiento circular esta aceleración es la llamada centrípeta.

Aproximación de primer orden de funciones

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto x_0. La idea fundamental de la aproximación de primer orden es que, cerca de x_0, la función puede aproximarse por una función lineal.

Geométricamente, esto significa que, si hacemos "zoom" alrededor de x_0, la gráfica de f se parece cada vez más a la recta tangente en ese punto.

Recordemos que la recta tangente a la gráfica de f en x_0 está dada por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta función $L(x)$ se denomina **aproximación lineal** o **aproximación de primer orden** de f en x_0.

Teorema 14.3. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \texttt{Int}(A)$. La función f es diferenciable en x_0 si y sólo si existe una constante real m y una función $E : [-\delta, 0) \cup (0, \delta] \to \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y $\lim_{h\to 0} E(h) = 0$ tales que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + hE(h) \quad \forall h \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]. \tag{14.3}$$

DEMOSTRACIÓN. $\Leftarrow$) Como $h \neq 0$ se tiene que la expresión (14.3) es equivalente a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + E(h) \quad \forall h \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta].$$

Si esta expresión es cierta, entonces claramente la función es derivable en x_0, ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \lim_{h\to 0} E(h) = m.$$

Además, se concluye que $f'(x_0) = m$.

$\Rightarrow$) Si, recíprocamente, f es diferenciable en x_0, entonces definimos $m = f'(x_0)$ y

$$E(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - m \quad \forall h \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta].$$

Con esto, la fórmula es cierta y, además, $\lim_{h\to 0} E(h) = 0$.

□

14.8 Material extra

Ejemplo: Funciones hiperbólicas

A partir de la función exponencial, se definen las funciones hiperbólicas mediante las reglas

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}, \qquad \text{etc.}$$

(1) Derivada de seno hiperbólico:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{senh}(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x - (e^{-x})'}{2}. \end{aligned}$$

Pero, usando la regla de la derivada de una composición se tiene que

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh(x). \end{aligned}$$

(2) Derivada de coseno hiperbólico:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x + \left(e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x). \end{aligned}$$

(3) Derivada de la tangente hiperbólica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tanh(x) &= \left(\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}\right)' \\ &= \frac{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)}. \end{aligned}$$

Propiedad 14.1.

(1) *De la definición se obtiene directamente que* $\operatorname{senh}(x)$ *es una función impar y que* $\cosh(x)$ *es una función par. De hecho, corresponden a la descomposición de la función exponencial en una parte par y una impar.*

(2) *Además se tiene que*

$$\begin{aligned} \cosh(x) + \operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \\ \cosh(x) - \operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}. \end{aligned}$$

por lo tanto, multiplicando se tiene que

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

Esto constituye la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas.

(3) *Con esta propiedad se tiene que*

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = sech^2(x)$$

(4) ***Derivada de la cotangente hiperbólica:***

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}cotanh(x) &= \left(\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}\right)' \\ &= \frac{\operatorname{senh}^2(x)-\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} = -cosech^2(x).\end{aligned}$$

(5) ***Otras derivadas son:*** $(sech(x))' = -sech(x)\tanh(x)$ y $(cosech(x))' = -cosech(x)coth(x)$.

Derivación de funciones implícitas

Existen relaciones del tipo $F(x,y)=0$, las cuales definen alguna función $y=f(x)$ en torno de algún punto $P=(x_0,y_0)$, en las cuales no es posible despejar algebraicamente la variable dependiente y para obtener una forma explícita de la función f. En este caso se dice que la relación $F(x,y)=0$ define a la función $y=f(x)$ en forma implícita en torno del punto $P=(x_0,y_0)$.

Ejemplo 14.7.
(1) $x^2+y^2=R^2$.

(2) $x^3+3xy^2+2y^3=1$.

(3) $x^3y^3+3\operatorname{sen}y+\cos xy^2=1$.

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Para derivar estas funciones basta con recordar que $y=f(x)$ y derivar las expresiones usando la regla para derivar composiciones.

Así por ejemplo en el caso **(3)** se obtiene que:

$$\begin{aligned}x^3y^3+3\operatorname{sen}y+\cos xy^2 &= 1 \qquad\qquad / \tfrac{d}{dx}\\ 3x^2y^3+x^3\cdot 3y^2y'+3\cos y\cdot y'-\operatorname{sen}xy^2\cdot(y^2+2xyy') &= 0,\end{aligned}$$

de donde:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2\operatorname{sen}xy^2-3x^2y^3}{3x^3y^2+3\cos y-2xy\operatorname{sen}(xy^2)}.$$

En estos casos, debe darse el punto completo para evaluar el valor de la derivada, es decir, debe conocerse (x_0,y_0).

Derivación logarítmica

Definición (Operador logarítmico) El operador $\mathcal{L}$ asigna a cada función diferenciable, y no nula f, la función f'/f, es decir, es un operador tal que: $f \mapsto \mathcal{L}(f) = (\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$

$\mathcal{L}$ se denomina **operador logarítmico**.

Propiedad 14.2. **(1)** $\mathcal{L}(f) = f'/f \iff f' = f \cdot \mathcal{L}(f)$ *(por definición)*

(2) $\mathcal{L}(f \cdot g) = \dfrac{(fg)'}{fg} = \mathcal{L}f + \mathcal{L}g$

(3) $\mathcal{L}(f/g) = \mathcal{L}f - \mathcal{L}g$

(4) $\mathcal{L}(f^\alpha) = \alpha\mathcal{L}(f)$

Ejemplo 14.8.
(1) $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(id(x)) = \dfrac{1}{id(x)} = \dfrac{1}{x}$.

(2) $\mathcal{L}(\operatorname{sen} x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$.

(3) $\mathcal{L}(x^m) = \dfrac{mx^{m-1}}{x^m} = \dfrac{m}{x}$.

Ejemplo 14.9.
(1) Calcular f' para $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^{3/2}\operatorname{sen}^3\sqrt{x^2+4}}{(x^4+1)^7\cos^6(x+2)}$.

Solución: Tomando $\mathcal{L}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x)) &= \left[\frac{(x^2+1)^{3/2}\operatorname{sen}^3\sqrt{x^2+4}}{(x^4+1)^7\cos^6(x+2)}\right] \\
&= \mathcal{L}(x^2+1)^{3/2} + \mathcal{L}\operatorname{sen}^3\sqrt{x^2+4} - \mathcal{L}(x^4+1)^7 - \mathcal{L}\cos^6(x+2) \\
&= \frac{3}{2}\mathcal{L}(x^2+1) + 3\mathcal{L}\operatorname{sen}\sqrt{x^2+4} - 7\mathcal{L}(x^4+1) - 6\mathcal{L}\cos(x+2) \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1} + 3\frac{\cos\sqrt{x^2+4}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+4}} - 7\frac{4x^3}{x^4+1} - 6\frac{-\operatorname{sen}(x+2)}{\cos(x+2)} \\
&= \frac{3x}{x^2+1} + \frac{3x\cot\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{28x^3}{x^4+1} + 6\tan(x+2).
\end{aligned}
$$

Con esto $f'(x) = f(x)\mathcal{L}(f(x))$.

(2) $f(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{3/2}(\cos x)^{1/5}}{\sqrt[4]{x^2-2}}$ (propuesto)

Guía Básica

Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. $\square$ La función f es derivable en un punto x_0 interior a su dominio ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

2. $\square$ La función f es derivable en un punto x_0 interior a su dominio ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ no existe.

3. $\square$ La función f es derivable en un punto x_0 interior a su dominio ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$ existe.

4. $\square$ La ecuación de la recta tangente en un punto $P = (a, f(a))$ a la curva $C = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ está dada por la ecuación $(y - f(a)) = f'(x)(x - a)$.

5. $\square$ La ecuación de la recta tangente en un punto $P = (a, f(a))$ a la curva $C = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ está dada por la ecuación $(y - f(a)) = f'(a)(x - a)$.

6. $\square$ La ecuación de la recta tangente en un punto $P = (a, f(a))$ a la curva $C = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ está dada por la ecuación $(y - f'(a)) = f(a)(x - a)$.

7. $\square$ $(x)' = 0$.

8. $\square$ $(x)' = 1$.

9. $\square$ $(x)' = x$.

10. $\square$ $(x^2)' = x^2$.

11. $\square$ $(x^2)' = 2x^2$.

12. $\square$ $(x^2)' = 2x$.

13. $\square$ $(x^2)' = 2$.

14. $\square$ $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$.

15. $\square$ $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^n$.

16. $\square$ $\dfrac{d(x^n)}{dx} = (n-1)x^n$.

17. $\square$ Si $y = uv \Rightarrow y' = u'v - uv'$.

18. $\square$ Si $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$.

19. $\square$ Si $y = uv \Rightarrow y' = u'v'$.

20. $\square$ Si $y = uv \Rightarrow y' = u'v' + uv$.

21. $\square$ Si $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v + uv'}{v^2}$.

22. $\square$ Si $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

23. $\square$ Si $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v}$.

24. $\square$ Si $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{v'}$.

25. $\square$ Para todo par de funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.

26. $\square$ Para todo par de funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(x))]' = f'(g'(x))$.

27. $\square$ Para todo par de funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(x))]' = f'(x)g'(x)$.

28. $\square$ Para todo trío de funciones f, g y h definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))g'(h(x))$.

29. $\square$ Para todo trío de funciones f, g y h definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))g'(x)h'(x)$.

30. $\square$ Para todo trío de funciones f, g y h definidas en $\mathbb{R}$ se tiene que $[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$.

31. $\square$ $[f(x + x^2)]' = f'(x + x^2)2x$.

32. $\square$ $[f(x + x^2)]' = f'(x + x^2)(1 + 2x)$.

33. $\square$ $[f(x + x^2)]' = f'(x + x^2)$.

34. $\square$ $[f(x + \ln(x))]' = f'\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

35. $\square$ $[f(x + \ln(x))]' = f'\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)(x + \ln(x))$.

36. $\square$ $[f(x + \ln(x))]' = f'(x + \ln(x))\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

37. $\square$ Si $(f(x))^2 + x = 1$ entonces $f'(x) = -\dfrac{x}{2f(x)}$.

38. $\square$ Si $(f(x))^2 + x = 1$ entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{2f(x)}$.

39. $\square$ Si $(f(x))^2 + x = 1$ entonces $f'(x) = -x$.

40. $\square$ $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

41. $\square$ $(\operatorname{sen} x)' = -\cos x$.

42. $\square$ $(\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

43. $\square$ $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

44. $\square$ $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x}, a \neq e$.

45. $\square$ $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

46. $\square$ $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)}, a \neq e$.

47. $\square$ $(a^x)' = a^x$.

48. $\square$ $(a^x)' = a^x \ln(x)$.

49. $\square$ $(a^x)' = a^x \ln(a)$.

50. $\square$ $(\cosh(x))' = -\operatorname{senh}(x)$.

51. $\square$ $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$.

Guía de Ejercicios

(1) Partiendo de la definición de derivada, encuentre las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $y = x^3$.

(b) $y = \dfrac{1}{x}$.

(c) $y = \operatorname{sen}^2(x)$.

(d) $y = x^4 + 3x^2 - 6$.

(e) $y = \dfrac{\dfrac{(x+1)^3}{3}}{x^2}$.

(2) Utilizando las reglas de derivación, calcule las derivadas de las siguientes funciones.

(a) $y = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$.

(b) $y = \dfrac{x^p}{x^m - a^m}$.

(c) $y = (a+x)\sqrt{a-x}$.

(d) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

(e) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$.

(g) $y = (1+\sqrt{x})^3$.

(h) $y = 2\operatorname{sen} x + \cos 3x$.

(i) $y = \tan(ax+b)$.

(j) $y = \operatorname{cotan}^2 5x$.

(k) $y = t\operatorname{sen} t + \cos t$.

(l) $y = \operatorname{sen}^3 t$.

(m) $y = \dfrac{\tan \dfrac{x}{2} + \operatorname{cotan}\dfrac{x}{2}}{x}$.

(n) $y = a\left(1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right)^2$.

(ñ) $y = \ln(\cos x)$.

(o) $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$.

(p) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$.

(q) $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right)$.

(r) $y = \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right)$.

(s) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$.

(t) $y = \ln^3 x$.

(u) $y = \ln(\ln x)$.

(v) $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2-1} + x}\right)$.

(w) $y = e^{x^x}$.

(x) $y = x^{\ln x}$.

(y) $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

(z) $y = \operatorname{sen}(\sqrt{1-2^x})$.

(3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones, hallando previamente sus logaritmos.

(a) $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$.

(b) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

(c) $y = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\operatorname{sen} x})$.

(d) $y = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$, con $0 \leq x < \pi$.

(e) $y = \arctan \dfrac{a}{x} + \ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

(f) $y = \arccos\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$.

(g) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$.

(h) $y = \ln\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right) + 2\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

(i) $y = x^{\operatorname{arc\,sen} x}$.

(4) Usando derivación de funciones implícitas, encuentre y' si:

(a) $y^2 = 4px$.

(b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

(c) $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

(d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(e) $y = \cos(x + y)$.

(f) $y = \cos(xy)$.

(5) Calcule $y'(x)$, para las funciones dadas paramétricamente:

(a) $x = a\cos(t),\ y = b\operatorname{sen}(t)$.

(b) $x = a(t - \operatorname{sen}(t)),\ y = a(1 - \cos(t))$.

(c) $x = 2\ln(\operatorname{cotan}(s)),\ y = \tan(s) + \operatorname{cotan}(s)$.

Guía de Problemas

P1. Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son

$$x = v_0 \cos(\alpha)t, \quad y = v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Determine la dirección del movimiento para los 5 primeros segundos, siendo $\alpha = 60, v_0 = 50m/s$, bosquejar.

P2. En el triángulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$. Sean b, c constantes, demuestre que $\frac{da}{dA} = h_a$, en que h_a es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interprete el significado geométrico de este resultado.

P3. Derive las siguientes funciones:

(a) $y = \operatorname{sen}(x^{\cos x}) + \cos(x^{\operatorname{sen} x})$.

(b) $y = \sqrt[n]{\dfrac{x - \tan x}{x + \sec x}}$.

(c) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{3\operatorname{sen} x}{4 + 5\cos x}\right)$.

P4. Considere la función dada por la regla

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Pruebe que si $n \geq 1$ se cumple que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

(b) Pruebe que si $n > 1$ entonces f es derivable en $x_0 = 0$, pero para $n = 1$ no.

(c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ y encuentre para qué valores de n se cumple $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$

P5. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\operatorname{arc\,sen}(yx)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

P6. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) = \operatorname{sen}(yx)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

P7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \leq a(x - y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P8. Determine un punto en que la curva $x^2 + y^2 = e^{2k \arctan(y/x)}$, k =constante, corta al semieje positivo OX y escriba las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.

P9. Considere las funciones siguientes definidas para todo $x > 0$ como:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 + x^3}{2 + x}}, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b, \quad h(x) = 4c \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - c \operatorname{sen}(cx) + d.$$

Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que f y g tienen la misma recta tangente en $x = 1$ y además que las rectas tangentes a f y h son perpendiculares en $x = 0$. Nota. Dado que h no está definido en $x = 0$ considere su límite cuando x tiende a 0^+.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Derivadas de orden superior

La derivada de f en x_0 y la derivada de f' en x_0 están dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ y \ (f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Definición Para $n \in \mathbb{N}$ se define $f^{(n)}(x_0)$, *la derivada de orden n de f en x_0*, como el valor del siguiente límite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

donde $f^{(0)}$ es la función f.

Observación:

- Lo anterior equivale a definir $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$.
- $f^{(1)}$ es lo mismo que f' y $f^{(2)}$ es lo mismo que $(f')' = f''$.
- Si $f^{(n)}(x_0)$ existe entonces decimos que f es derivable n veces en x_0.
    - En este caso $\lim_{x \to x_0} f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0)$.
- Para que tenga sentido calcular $f^{(n)}(x_0)$ es necesario que:
    - Exista $\delta > 0$ tal que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esté incluido en el dominio de la función $f^{(n-1)}$.
    - $f^{(k)}$ sea continua para todo $0 \leq k \leq n - 1$.

Ejemplos: Funciones básicas

Ejemplo 15.1.
(1) $f(x) = e^x$

Sabemos que $(e^x)'(x_0) = e^{x_0}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^x)^{(n)}(x_0) = e^{x_0}.$$

(2) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

Sabemos que $(\operatorname{sen}(x))'(x_0) = \cos(x_0)$ y que $(\cos(x))'(x_0) = -\operatorname{sen}(x_0)$. Entonces,

$$(\operatorname{sen}(x))^{(n)}(x_0) = \operatorname{sen}\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$(\cos(x))^{(n)}(x_0) = \cos\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)$$

(3) $f(x) = \operatorname{senh}(x)^9$

Sabemos que $(\operatorname{senh}(x))'(x_0) = \cosh(x_0)$ y que $(\cosh(x))'(x_0) = \operatorname{senh}(x_0)$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, si n es par $(\operatorname{senh}(x))^{(n)}(x_0) = \operatorname{senh}(x_0)$ y si n es impar entonces $(\operatorname{senh}(x))^{(n)}(x_0) = \cosh(x_0)$. Luego

$$(\operatorname{senh})^{(n)}(x_0) = \frac{e^{x_0} + (-1)^{n+1}e^{-x_0}}{2} \;\; y \;\; (\cosh)^{(n)}(x_0) = \frac{e^{x_0} + (-1)^{n}e^{-x_0}}{2}.$$

(4) $f(x) = x^k$

Sabemos que $\left(x^k\right)'(x_0) = k\left(x_0^{k-1}\right)$ y que $\left(kx^{k-1}\right)'(x_0) = k(k-1)x_0^{k-2}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(x^k\right)^{(n)}(x_0) = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x_0^{k-n} & n \le k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

(5) Polinomio

Para $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k$, se tiene que $p(x_0) = a_0$, $p'(x_0) = a_1$, $p''(x_0) = 2a_2$ y en general,

$$p^{(n)}(x_0) = \begin{cases} n!a_n & n \le k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Sabemos que $\left(\dfrac{1}{x}\right)'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$ y que $\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)'\right)'(x_0) = \left(-\dfrac{1}{x_0^2}\right)' = \dfrac{2}{x_0^3}$. En general,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}(x_0) = \frac{1\cdot 2\cdots n}{x_0^{n+1}}(-1)^n = \frac{n!}{x_0^{n+1}}(-1)^n.$$

(7) $f(x) = \ln(x)$

Sabemos que $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ y como $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}(x_0) = \dfrac{n!}{x_0^{n+1}}(-1)^n$ tenemos que

$$(\ln(x))^{(n)}(x_0) = \frac{(n-1)!}{x_0^n}(-1)^{n-1}.$$

(8) $f(x) = x^{-k}$

Sabemos que $\left(x^{-k}\right)'(x_0) = -k\left(x_0^{-k-1}\right)$ y que $\left(-kx^{-k-1}\right)'(x_0) = -k(-k-1)\,x_0^{-k-2}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(x^{-k}\right)^{(n)}(x_0) &= -k(-k-1)\cdots(-k-n+1)\,x_0^{-k-n}\\ &= (-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)\,x_0^{-k-n}.\end{aligned}$$

(9) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Sabemos que $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ y que $\left(\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'\right)' = \left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. En general,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{1\cdot 2\cdots(n)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Derivada $n-$ésima de un producto.

Proposición 15.1 (Fórmula de Leibnitz). *Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de (fg) está dada por:*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\,g^{(n-k)}(a).$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción.

Caso base: Para $n = 1$ se cumple que: $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

Etapa inductiva: Supongamos la hipótesis inductiva:

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\,g^{(n-k)}(a).$$

Aplicando la definición de $()^{(n+1)}$, la hipótesis de inducción, las reglas de la derivada de una suma y un producto $\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' = f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}$ y propiedades de las sumatorias, se obtiene el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(a) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)'(a)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(a)\,g^{(n-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\,g^{(n-k+1)}(a)\\
&= f^{(n+1)}(a)\,g(a) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k+1)}(a)\,g^{(n-k)}(a)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\,g^{(n-k+1)}(a) + f(a)\,g^{(n+1)}(a)\\
&= f^{(n+1)}(a)\,g(a) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)f^{(k+1)}(a)\,g^{(n-k)}(a) + f(a)\,g^{(n+1)}(a)
\end{aligned}$$

La conclusión se alcanza al recordar que $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ y reagrupar las sumas. □

Conocidas las derivadas $n-$ésimas de dos funciones podemos obtener aquella del producto usando la fórmula de Leibniz.

Ejemplo 15.2.

(1) $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$

La derivada $n-$ésima de x es 0 si $n \geq 2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(x\operatorname{sen}(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^{(k)}(\operatorname{sen}(x))^{(n-k)}\\
&= x(\operatorname{sen}(x))^{(n)} + n(\operatorname{sen}(x))^{(n-1)}\\
&= x\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) + n\operatorname{sen}\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \arctan(x)$

Las dos primeras derivadas están dadas por $(\arctan)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $(\arctan)'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ y satisfacen

$$\left(1+x^2\right)f'' + 2xf' = 0.$$

Al aplicar la fórmula de Leibniz para $n-2$ en ambos términos de la suma se obtiene que.

$$\left(\left(1+x^2\right)f''\right)^{(n-2)} = \left(1+x^2\right)(f'')^{(n-2)} + \binom{n-2}{1}(2x)(f'')^{(n-3)} + \binom{n-2}{2}2(f'')^{(n-4)}$$

y

$$(2xf')^{(n-2)} = 2x(f')^{(n-2)} + \binom{n-2}{1}2(f')^{(n-3)}.$$

Esto nos da la siguiente fórmula de recurrencia para $f^{(n)}$

$$\left(1+x^2\right)f^{(n)}+2x\left(n-2\right)f^{(n-1)}+\left(n-2\right)\left(n-3\right)f^{(n-2)}+2xf^{(n-1)}+2\left(n-2\right)f^{(n-2)}=0.$$

Entonces, podemos calcular la derivada $n-$ésima de $\arctan(x)$ en $x_0=0$ mediante la recurrencia:

$$f^{(n)}(0)=-\left(n-2\right)\left(n-1\right)f^{(n-2)}(0).$$

Partiendo con $f^{(0)}(0)=0$ y $f^{(1)}(0)=1$ se concluye que $f^{(n)}(0)=0$ para n par y $f^{(2k+1)}(0)=\left(-1\right)^k(2k)!$.

15.1 Polinomios de Taylor

En el capítulo anterior, vimos si una función es diferenciable en un punto x_0, es posible aproximarse a dicha función usando su recta tangente. Vimos, además, que cuando más cerca estamos del punto x_0, mejor es la aproximación. Sin embargo, una forma de mejorar la aproximación es usar un *Polinomio de Taylor*:

Definición Para f tal que $f^{(k)}(x_0)$ existe, el *polinomio de Taylor de f en torno a x_0 y de orden k*, está dado por

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_k(x-x_0)^k,$$

donde para todo $j\in\{0,\dots,k\}$, $f^{(j)}(x_0)=p^{(j)}(x_0)$.

Observación:

- Como $p^{(j)}(x_0)=j!a_j$ se tiene que los coeficientes quedan determinados por $a_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$.
- El polinomio de Taylor de la función f en torno a x_0 y de orden 1 corresponde a la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$.
- Igual que la recta tangente, el polinomio de Taylor aproxima la función f cerca del punto x_0. A mayor grado k, mejor será la aproximación.
- Si p es el polinomio de Taylor de la función f en torno x_0 de orden k entonces p' es el polinomio de Taylor de la función f' en torno a x_0 y de orden $k-1$.

Ejemplos con $k = 2, 3, 4$.

Ejemplo 15.3.

(1) Taylor para $\sqrt{x}$ en $x_0 = 4$ de orden 2

Para encontrar el polinomio debemos conocer los valores f, f' y f'' en $x_0 = 4$. $f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, $f''(4) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{32}$. Entonces, el polinomio de Taylor de $\sqrt{x}$ de orden 2 en torno a x_0 es

$$p(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32 \cdot 2}(x-4)^2.$$

(2) Taylor para $x\ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ de orden 3

$f(0) = 0$, $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$, $f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}$. Entonces, el polinomio de Taylor en torno a $x_0 = 0$ de orden 3 es

$$p(x) = 0 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{3}{3!}x^3 = x^2 - \frac{x^3}{2}.$$

(3) Taylor para $\operatorname{sen}(x)$ en π de orden 4

$f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = -1$, $f''(\pi) = 0$, $f^{(3)}(\pi) = 1$ y $f^{(4)}(\pi) = 0$. Entonces es polinomio buscado es

$$p(x) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}.$$

Notar que como $f^{(4)}(\pi) = 0$ el polinomio de orden 3 y el de orden 4 son iguales.

Ejemplos de orden superior

Para las funciones donde $f^{(j)}(x_0)$, algunas elecciones de x_0 producen polinomios de Taylor más simples.

Ejemplo 15.4.

(1) Taylor de orden k para e^x en $x_0 = 0$

Para $x_0 = 0$ tenemos que $(e^x)^{(j)}(0) = 1$, para todo j. Entonces su polinomio de Taylor de orden k es

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}.$$

(2) Taylor de orden $2k+1$ para $\operatorname{sen}(x)$ en $x_0 = 0$

Para $x_0 = 0$ tenemos que $(\operatorname{sen}(x))^{(j)}(0) = 0$ para j par y $(\operatorname{sen}(x))^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{j-1}{2}}$ para j impar. Entonces los polinomios de Taylor de orden $2k+1$ y de orden $2k+2$ están dados por

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(3) Taylor de orden k para $\ln(1+x)$ en $x_0 = 0$

Para $x_0 = 0$ tenemos que $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$. Como

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(j-1)}(0) = (-1)^{j+1}\frac{(j-1)!}{(1+0)^j},$$

tenemos que

$$(\ln(1+x))^{(j)}(0) = (-1)^{j+1}\frac{(j-1)!}{(1+0)^j}.$$

Con esto, el polinomio de Taylor de orden k en torno a 0 es

$$p(x) = 0+x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{2!}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

(4) Taylor de orden k para $\arctan(x)$ en $x_0 = 0$

Para $\arctan(x)$ y $x_0 = 0$ tenemos que las derivadas de orden par en cero son cero y las de orden impar están dadas por $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$. Luego, el polinomio de Taylor de orden $2k+1$ y orden $2k+2$ en torno a 0 es

$$\begin{aligned} p(x) &= x - \frac{2!x^3}{3!} + \frac{4!x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

15.2 Regla de l'Hôpital

Propiedad 15.1. *La siguiente es una herramienta para calcular límites que será demostrada en el curso siguiente.*

Para $B \in \{+\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-, x_0\}$ y g con $g'(x) \neq 0$:

Si $\displaystyle\lim_{x\to B}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ y $\displaystyle\lim_{x\to B} f(x) = \lim_{x\to B} g(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x\to B}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Si $\lim_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *y* $\lim_{x\to B} f(x) = \lim_{x\to B} g(x) = +\infty$ *entonces*

$$\lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

La regla se usa en el cálculo del $\lim_{x\to B} \frac{f(x)}{g(x)}$. Para ello se procede como sigue:

(1) Se verifica que $\lim_{x\to B} f(x) = \lim_{x\to B} g(x) = 0$ o que $\lim_{x\to B} f(x) = \lim_{x\to B} g(x) = +\infty$.

(2) Se calcula f' y g' .

(3) Se plantea el problema auxiliar $\lim_{x\to B} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Si el límite en este problema auxiliar es ℓ entonces el límite en el problema original también es ℓ.

Ejemplo 15.5.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

(a) Primero vemos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$.

(b) Las derivadas son $(\operatorname{sen})' = \cos$ y $(x)' = 1$.

(c) El problema auxiliar es $\lim \frac{\cos(x)}{1}$. Como este último límite vale 1 el original también vale 1.

El paso al problema auxiliar lo describiremos por el símbolo $\hookrightarrow^{L'H}$. Entonces el cálculo del límite lo podemos resumir así.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

(2) Cálculo de una derivada

Calculemos la derivada de la función f en $x = 0$, para f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

o sea,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}.$$

Desarrollo

(a) Verificamos que $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen}(x) - x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

(b) Calculamos $(\operatorname{sen}(x) - x)' = \cos(x) - 1$ y $(x^2)' = 2x$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = 0.$$

La última igualdad puede redemostrarse usando una vez más la regla de l'Hôpital como sigue.

(a) Verificamos que $\lim_{x\to 0} (\cos(x) - 1) = \lim_{x\to 0} 2x = 0$.

(b) Calculamos $(\cos(x) - 1)' = -\operatorname{sen}(x)$ y $(2x)' = 2$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2} = 0.$$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$

(a) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen}(x) - x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0$

(b) $(\operatorname{sen}(x) - x)' = \cos(x) - 1$ y $(x^3)' = 3x^2$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2}.$$

Iterando nuevamente la regla:

(a) $\lim_{x\to 0} (\cos(x) - 1) = \lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$

(b) $(\cos(x) - 1)' = -\operatorname{sen}(x)$ y $\left(3x^2\right)' = 6x$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))}$

(a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2(\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \ln(\cos(\sqrt{x})) = 0$

(b) $(\operatorname{sen}^2(\sqrt{x}))' = 2\operatorname{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$ y

$(\ln(\cos(\sqrt{x})))' = \frac{1}{\cos(\sqrt{x})}(-\operatorname{sen}(\sqrt{x}))\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-1}{\cos(\sqrt{x})}\operatorname{sen}(\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -2.$$

(5) Iteración de la regla

Este ejemplo corresponde a una aplicación iterada de la regla de l'Hôpital en el cálculo de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4}$$
$$\hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + x}{20x^3} \hookrightarrow^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) + 1}{60x^2} = \frac{1}{120}.$$

El uso es correcto pues:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ para las funciones x^3, x^4, x^5,$\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}$, $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ y $-\operatorname{sen}(x) + x$.

(b) $\left(\left(\left(\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}\right)'\right)'\right)' = \left(\left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)'\right)' = (-\operatorname{sen}(x) + x)' = -\cos(x) + 1$ y $\left(\left((x^5)'\right)'\right)' = \left((5x^4)'\right)' = (20x^3)' = 60x^2$.

Guía Básica

Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. ☐ Si $f(x) = x^3$ entonces $f^{(4)}(x) = 3!$.

2. ☐ Si $f(x) = x^4$ entonces $f^{(4)}(x) = 3!$.

3. ☐ Si $f(x) = e^x$ entonces $f^{(12)}(x) = e^x$.

4. ☐ Si $f(x) = e^x$ entonces $f^{(0)}(x) = 1$.

5. ☐ Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces $f^{(12)} = \operatorname{sen}(x + 6\pi)$.

6. ☐ Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces $f^{(8)} = \operatorname{sen}(x + 6\pi)$.

7. ☐ Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f^{(8)}(x) = \cos(x)$.

8. ☐ Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f^{(7)}(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

9. ☐ Si $f(x) = x^3 + 27x^9 - x^{110}$ entonces $f^{(90)}(x) = -(110)!x^{20}$.

10. ☐ Si $f(x) = x^3 + 27x^9 - x^{110}$ entonces $f^{(109)}(x) = -(110)!x$.

11. ☐ Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f^{(3)}(x) = (\ln(x))^3$.

12. ☐ Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.

13. ☐ Si $f(x) = \dfrac{1}{x^{15}}$ entonces $f^{(16)}(x) = 0$.

14. ☐ Si $f(x) = \dfrac{1}{x^{15}}$ entonces $f^{(4)}(x) = -\dfrac{1}{x^{11}}$.

15. ☐ Si f y g son diferenciables 3 veces entonces $(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f^{(2)}g^{(1)} + 3f^{(1)}g^{(2)} + fg^{(3)}$.

16. ☐ Si g es diferenciable 3 veces entonces $(xg)^{(3)} = 3g^{(2)} + xg^{(3)}$.

17. ☐ Si f es diferenciable 4 veces entonces $(x^2 f)^{(4)} = x^2 f^{(4)} + 8xf^{(3)} + 10f^{(2)}$.

18. ☐ La derivada de orden 10 de $\arctan(x)$ en 0 es $(10)!$.

19. ☐ La derivada de orden 11 de $\arctan(x)$ en 0 es $-(11)!$.

20. ☐ Si $(x-1)^3 - (x-1)^7$ es el polinomio de Taylor de order 7 de f en torno a 1 entonces la derivada de orden 5 de f en 1 es 0.

21. ☐ Si $x + 2x^2 - x^3 + x^{14}$ es el polinomio de Taylor de una función f de orden 15 en torno a 0 entonces $x + 2x^2 - x^3$ es el polinomio de Taylor de f de orden 3 en torno a 0.

22. $\square$ Si la derivada de orden 10 de f es cero en 1 entonces el polinomio de Taylor de f en torno a 1 de orden 10 tiene grado 10.

23. $\square$ Si f es una función con $f(2) = 0$ entonces 2 es una raíz de todos sus polinomios de Taylor en torno a 2.

24. $\square$ Si $x + x^5 - 8x^9$ es el polinomio de Taylor de orden 11 para una función f en torno a 0 entonces todas las derivadas pares de orden menor que 10 de f son cero en 0.

25. $\square$ Si la derivada de orden 10 de f es cero en 1 entonces el polinomio de Taylor de f en torno a 1 de orden 10 tiene grado 10.

26. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\operatorname{sen}(x)$ en torno a π es $x + x^3$.

27. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\operatorname{sen}(x)$ en torno a π es $-(x - \pi) + (x - \pi)^3$.

28. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\operatorname{sen}(x)$ en torno a π es $-(x - \pi) + \dfrac{1}{3!}(x - \pi)^3$.

29. $\square$ La recta $f(x_0) + 2f'(x_0)(x - x_0)$ es el polinomio de Taylor de orden 2 para f en torno a x_0.

30. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 2 de la función e^x en torno a 0 es $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

31. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 3 de la función e^x en torno a 0 es $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{3}x^3$.

32. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 5 de la función arctan en torno a 0 es $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

33. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 5 de la función arctan en torno a 0 es $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7!}$.

34. $\square$ El polinomio de Taylor de orden 4 de la función $\ln(x)$ en torno a 1 es $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

35. $\square$ Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

36. $\square$ Si $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f''(x)}{x^2} = 3$ y $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x^3} = 0$.

37. $\square$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} \neq 1$.

38. $\square$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$ no existe.

39. $\square$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} = \tfrac{1}{6}$.

40. $\square$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120}$.

41. $\square$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$.

Guía de Ejercicios

(1) Calcule las derivadas $n-$ésimas de las siguientes funciones del modo que se indica.

Directamente.

(a) e^{2x}.

(b) $\operatorname{sen}(2x)$.

(c) $(\operatorname{sen}(x))^2$.

(d) a^x.

(e) $\dfrac{1-x}{1+x}$.

(f) $x^3\ln(1+x)$.

Usando la fórmula de Leibnitz.

a) $x^2\operatorname{sen}(x)$ de orden 3.

b) $\dfrac{x}{e^x}$ de orden 5.

c) $x\ln(2x)$ de orden 3.

d) xe^x de cualquier orden.

e) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ de cualquier orden.

f) $x^3\ln(1+x)$ de cualquier orden.

(2) Encuentre los desarrollos de Taylor de las siguientes funciones.

(a) $\sqrt{x^2+1}$ en torno a 0 y de orden 3.

(b) $\arctan(x-\ln(x))$ en torno a 1 y de orden 3.

(c) $e^{\frac{1}{x^2}}$ en torno a 2 y de orden 6.

(d) $\cosh(1+\operatorname{sen}(x))$ en torno a π y de orden 3.

(e) $\dfrac{1}{x\operatorname{sen}(x)-cos(x)}$ en torno a 0 y de orden 2.

(f) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$ en torno a 0 y de orden 3.

(g) $\dfrac{x^2}{1-x}$ en torno a 0 y de orden cualquiera.

(h) $x^2\ln(1+x)$ en torno a 0 y de orden cualquiera.

(3) Calcule los siguientes límites utilizando apropiadamente la regla de l'Hôpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x}{x^2}-\frac{2^x}{x^2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan(x)}{x-\operatorname{sen}(x)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)-1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}(x))^{\tan(x)}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^k}$, $k>0$ entero.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x^2}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{x^2}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x\cosh(x)}\right)$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x)} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Demuestre que la función f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+x} - \cos(x)\ln(1+x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

y encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en cero.

P2. Sea $f(x) = e^{x^2/2}$. Demostrar que $f' = xf$ y que para $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x_0) = x_0 f^{(n-1)}(x_0) + (n-1) f^{(n-2)}(x_0)$$

Use esta fórmula para encontrar el polinomio de Taylor de f en torno a 1 de orden 4 y el polinomio de Taylor de f en torno a 0 de orden n, cualquiera.

P3. Demuestre que si f alcanza un máximo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$. Use este hecho para determinar el máximo de la función $\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

P4. Demuestre que si $f''(x_0)$ existe entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Use esta expresión para probar que si f tiene un mínimo en x_0 entonces $f''(x_0) \geq 0$. Con ayuda de esto último, determine si 0 es un mínimo de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

P5. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función $(1+x)^n$ de orden n en torno a 0. Interprete su resultado en términos del teorema del Binomio.