

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 3

Indicaciones generales:

- Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.
- Recordar que $\mathbb{N}$ contiene a 0.

P1. Cardinales.

a) (2 ptos) Sea

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \{0, 1, 2, \dots, 100\} \times \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x \wedge z \in \{x, x+1, x+2, \dots, y\} \right\}.$$

Determine $|X|$.

Solución: Notamos que $X = \{(x, 2x, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq x \leq 100 \wedge x \leq z \leq 2x\} = \bigcup_{x=0}^{100} \{(x, 2x, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \leq z \leq 2x\}$. Notamos además que para todo $x, x', z, z' \in \mathbb{Z}^3$ con $x \neq x'$ se tiene que $(x, 2x, z) \neq (x', 2x', z')$. Por lo tanto, X es la unión disjunta de los conjuntos $\{(x, 2x, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \leq z \leq 2x\}$ y

$$|X| = \sum_{x=0}^{100} |\{(x, 2x, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \leq z \leq 2x\}|$$

(0.7 pto). Para $x \in \{0, 1, \dots, 100\}$ fijo tenemos que $|\{(x, 2x, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \leq z \leq 2x\}| = |\{z \in \mathbb{Z} \mid x \leq z \leq 2x\}| = 2x - x + 1 = x + 1$ (0.7 pto). Por lo tanto,

$$|X| = \sum_{x=0}^{100} (x + 1) = \sum_{x=0}^{100} x + \sum_{x=0}^{100} 1 = \frac{100 \cdot 101}{2} + 101 = 5151$$

(0.6 pto)

b) (2.5 ptos) Para $i \in \mathbb{N}$ sea $A_i = \{i\} \times \{0, \pi, 2\pi, \dots, i\pi\}$. Determine el cardinal de $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Solución: Notamos que $A = \{(j, x) \mid \exists i \in \mathbb{N}, (j = i \wedge x \in \{0, \pi, 2\pi, \dots, i\pi\})\} = \{(j, i\pi) \mid j \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq j\} \subseteq \mathbb{N} \times \{i\pi \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Mostraremos que $\Pi = \{i\pi \mid i \in \mathbb{N}\}$ es numerable: En efecto, $f : \mathbb{N} \rightarrow \Pi$, $f(n) = n \cdot \pi$ es biyectiva porque para $g : \Pi \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{x}{\pi}$ tenemos que $f \circ g : \Pi \rightarrow \Pi$, $g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f \circ g(x) = f(\frac{x}{\pi}) = \frac{x}{\pi} \cdot \pi = x$ y $g \circ f(n) = g(n \cdot \pi) = \frac{n \cdot \pi}{\pi} = n$, por lo que $f \circ g = id_{\Pi}$ y $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ (0.7 pto). Como $A \subseteq \mathbb{N} \times \Pi$, concluimos que

$|A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, donde la última desigualdad vale porque por una proposición de los apuntes un producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable (0.8 pto).

Para ver que $|A| = |\mathbb{N}|$, falta mostrar que $|\mathbb{N}| \leq |A|$ (0.2 pto). Para esto, mostramos que $h : \mathbb{N} \rightarrow A$, $h(n) = (n, 0)$ es inyectiva (0.3 pto). Efectivamente, dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ arbitrarios con $n_1 \neq n_2$, se tiene que $h(n_1) = (n_1, 0) \neq (n_2, 0) = h(n_2)$ (0.5 pto).

- c) (1.5 ptos) Sean $B_1 = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y $B_2 = (3, 4) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $B_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x \in \mathbb{Z}\}$. Muestre que $|B_1| = |B_2 \setminus B_3|$.

Se puede asumir que B_2 es infinito (sin necesidad de probarlo).

Solución: Notamos que $B_2 \cap B_3 = \{3.2, 3.4, 3.6, 3.8\}$ por lo que $|B_2 \cap B_3| = 4$ que es finito. Entonces $|B_2 \setminus B_3| = |B_2 \setminus (B_2 \cap B_3)| = |B_2|$ por la proposición sobre perturbaciones finitas, y porque se asume que B_2 es infinito (0.6 pto).

Falta mostrar que $|B_2| = |B_1|$, lo haremos encontrando una biyección entre ambos conjuntos (0.2 pto). Para esto, consideramos $f : B_1 \rightarrow B_2$, $f(x) = \frac{x}{2} + 3.5$ y $g : B_2 \rightarrow B_1$, $g(x) = 2(x - 3.5)$. Se tiene que $f \circ g : B_2 \rightarrow B_2$, $g \circ f : B_1 \rightarrow B_1$, además,

$$f \circ g(x) = f(2(x - 3.5)) = \frac{2(x - 3.5)}{2} + 3.5 = x$$

y

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x}{2} + 3.5\right) = 2\left(\left(\frac{x}{2} + 3.5\right) - 3.5\right) = x,$$

es decir, $g \circ f = id_{B_1}$ y $f \circ g = id_{B_2}$ por lo que f es biyectiva (0.7 pto).

P2. Estructuras algebraicas.

- a) (1 pto) Determine si $\{8z + 5 \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Solución: No lo es, porque no contiene todos los inversos. Por ejemplo contiene a 5 pero no contiene a -5 , el inverso del 5 (0.6 pto): Si $-5 = 8z + 5$ para algún $z \in \mathbb{Z}$ entonces $z = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$, una contradicción (0.4 pto).

- b) (1.5 pto) Determine si $\{8z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Solución: Usamos la proposición de la caracterización de subgrupos. Para esto, sean $x, y \in \{8z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ arbitrarios (0.1 pto). Notamos que el inverso de y es $-y$ (0.1 pto), y que existen z, z' tales que $x = 8z$ y $y = 8z'$ (0.2 pto). Como $x + (-y) = 8z - 8z' = 8(z - z')$ (0.3 pto) y como $z - z'$ es un elemento de $\mathbb{Z}$ (0.3 pto), se tiene que $x + (-y) \in \{8z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (0.3 pto). Por lo tanto $\{8z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ (0.2 pto).

- c) (1.5 ptos) Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e , sean $a, b, c \in G$ tales que $c * c = a$ y $c * b = b * c$. Muestre que $a * b = b * a$.

Solución: Tenemos $c * b = b * c \Rightarrow c * (c * b) = c * (b * c) \Rightarrow (c * c) * b = (c * b) * c \Rightarrow a * b = (b * c) * c \Rightarrow a * b = b * (c * c) \Rightarrow a * b = b * a$ (1.5 pto).

- d) (2 pto) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, con neutro aditivo 0 y neutro multiplicativo 1. Sea $a \in A \setminus \{0\}$ un elemento que tiene un inverso multiplicativo a^{-1} . Muestre que para todo $b \in A \setminus \{0\}$ se tiene que $a \cdot b \neq 0$.

Solución: Por contradicción. Si $a \cdot b = 0$ entonces $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$, donde se usa la propiedad que $0 = x \cdot 0$ para todo $x \in A$ (0.4 pto), $a \cdot b = 0$ por elección (0.3 pto), asociatividad (0.3 pto), propiedad $a^{-1} \cdot a = 1$ (0.3 pto), propiedad $1 \cdot b = b$ (0.4 pto). Entonces $b = 0$, una contradicción (0.3 pto).

P3. Complejos.

- a) (2 pto) Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|4 + i^2| \cdot |z - i|^2 - \frac{3}{i}(z - \bar{z}) = |\sqrt{3}z - \sqrt{3}|^2 \iff \operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z).$$

Solución: Escribiendo $z = a + bi$ donde $a = \operatorname{Re}(z)$ y $b = \operatorname{Im}(z)$, tenemos que $|4 + i^2| \cdot |z - i|^2 - \frac{3}{i}(z - \bar{z}) = |\sqrt{3}z - \sqrt{3}|^2 \iff |4 - 1| \cdot |z - i|^2 - 6\operatorname{Im}(z) = |\sqrt{3}|^2 \cdot |z - 1|^2 \iff 3 \cdot |z - i|^2 - 6b = 3|z - 1|^2 \iff |z - i|^2 - 2b = |z - 1|^2 \iff |a + bi - i|^2 - 2b = |a + bi - 1|^2 \iff |a + (b - 1)i|^2 - 2b = |(a - 1) + bi|^2 \iff a^2 + (b - 1)^2 - 2b = (a - 1)^2 + b^2 \iff a^2 + b^2 - 2b + 1 - 2b = a^2 - 2a + 1 + b^2 \iff -4b = -2a \iff a = 2b \iff \operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z)$ (2 pto).

- b) (1.5 pto) Calcule $(1 + i)^8 - 18 + 2i$ y escriba el resultado en forma polar y en forma cartesiana.

Solución: Tenemos $(1 + i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = \sqrt{2}^8 e^{i8\frac{\pi}{4}} = 2^4 e^{i2\pi} = 16e^{i \cdot 0} = 16$ (una forma alternativa de llegar a esto sería computar $(i + 1)^2 = 2i$, $(i + 1)^4 = -4$, $(i + 1)^8 = 16$ pero hay que justificar cada cálculo) (0.7 pto). Por lo tanto $(1 + i)^8 - 18 + 2i = -2 + 2i$ en la forma cartesiana (0.3 pto) y $(1 + i)^8 - 18 + 2i = -2 + 2i = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{8} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ en la forma polar (0.5 pto).

- c) (2.5 pto) Determine la cuartas raíces w_1, w_2, w_3, w_4 de i . Calcule $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot \overline{-i}$.

Solución: Aplicando la fórmula para las raíces de un complejo obtenemos que $w_k = \sqrt[4]{|i|} e^{i\frac{\arg(i) + 2\pi k}{4}}$ para $k = 1, 2, 3, 4$ (0.3 pto). Tenemos $\sqrt[4]{|i|} = \sqrt[4]{1} = 1$ (0.3 pto) y $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ (0.3 pto). Entonces $w_1 = e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $w_2 = e^{i\frac{9\pi}{8}}$, $w_3 = e^{i\frac{13\pi}{8}}$, $w_4 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ (0.5 pto). Sabemos que $\overline{-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (0.4 pto). Entonces $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot \overline{-i} =$

$$e^{i\frac{5+9+13+1+4}{8}\pi} = e^{i\cdot 0\pi} = 1 \text{ (0.7 pto).}$$