

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 2

Indicación general: Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.

P1. Conjuntos imagen y preimagen/Coeficientes binomiales.

a) Sea $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$.

1) (0.7 pto) Determine $f(\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N} \times \{4, 5, 6\})$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 & f(\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N} \times \{4, 5, 6\}) \\
 &= \{f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N} \times \{4, 5, 6\}\} \quad (0.1 \text{ pto}) \\
 &= \{x_1 x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 \in \{-1, 0, 1\} \wedge x_2 \in \mathbb{N}\} \quad (0.2 \text{ pto}) \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad (0.3 \text{ pto}) \\
 &= \mathbb{Z}. \quad (0.1 \text{ pto})
 \end{aligned}$$

2) (1.8 pto) Encuentre A_i, B_i, C_i para $i = 1, \dots, 4$ tal que

$$f^{-1}(\{0, \frac{1}{2}, 1\}) = \bigcup_{i=1}^4 (A_i \times B_i \times C_i).$$

Solución: Por la definición del conjunto preimagen, se tiene

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\{0, \frac{1}{2}, 1\}) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}\} \quad (0.1 \text{ pto}) \\
 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 x_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}\} \quad (0.1 \text{ pto}) \\
 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 x_2 = 0 \vee x_1 x_2 = \frac{1}{2} \vee x_1 x_2 = 1\} \quad (0.1 \text{ pto}) \\
 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 x_2 = 0 \vee x_1 x_2 = 1\} \quad (0.3 \text{ pto}) \\
 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_1 = x_2 = 1 \vee x_1 = x_2 = -1\} \quad (0.2 \text{ pto}) \\
 &= (\{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z}) \cup (\{1\} \times \{1\} \times \mathbb{Z}) \\
 &\quad \cup (\{-1\} \times \{-1\} \times \mathbb{Z}), \quad (0.8 \text{ pto})
 \end{aligned}$$

donde en la cuarta desigualdad se usa el hecho que $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ es falso para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Entonces podemos tomar $A_1 = B_2 = \{0\}$, $A_3 = B_3 = \{1\}$, $A_4 = B_4 =$

$\{-1\}$ y $A_2 = B_1 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \mathbb{Z}$ (0.2 pto).

- b) (2 ptos) Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones, con g inyectiva. Sea $X \subseteq B$ con $f(f^{-1}(X)) \neq X$. Muestre que $g \circ f$ no es epiyectiva.

Solución: Por una proposición de los apuntes, se sabe que $f(f^{-1}(X)) = f(A) \cap X$ (0.4 pto) y entonces, como además $f(f^{-1}(X)) \neq X$, sabemos que $X \setminus f(A)$ contiene al menos un elemento x (0.3 pto). Como g es inyectiva, para todo $b \in B \setminus \{x\}$ se tiene que $g(b) \neq g(x)$ (0.4 pto), y por lo tanto y como $x \notin f(A)$, se tiene que $g(x) \notin g(f(A)) = g \circ f(A)$, es decir $g \circ f(A) \neq C$ (0.6 pto) y la afirmación sigue (0.3 pto).

- c) (1.5 ptos) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ se tiene que $\binom{n}{k}$ es impar. Muestre que $\binom{n+1}{k}$ es par para todo $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$.

Solución: Dado k arbitrario en $\mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$, notamos que por la identidad de Pascal, se tiene que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (0.5 pto). Como $1 \leq k \leq n$ tenemos $0 \leq k-1 \leq n$ (0.4 pto), por lo que aplica la suposición, es decir, $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{k-1}$ son impares (0.4 pto). Sumando dos impares se obtiene un par (0.2 pto).

P2. Sumatorias y coeficientes binomiales.

- a) (3 ptos)

$$3^{2n} \sum_{k=n}^{2n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \frac{2^{k-n}}{3^k}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 3^{2n} \sum_{k=n}^{2n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \frac{2^{k-n}}{3^k} &= 3^{2n} \sum_{k=0}^n (-1)^{(k+n)-n} \binom{n}{(k+n)-n} \frac{2^{(k+n)-n}}{3^{k+n}} \\ &= 3^{2n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{k+n}} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{3^{2n} \cdot (-2)^k}{3^{k+n}} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot (-2)^k \\ &= (3-2)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se usa una traslación de índices, y en la penúltima igualdad se usa el Teorema Binomial de Newton.

b) (3 ptos) Calcule para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$,

$$20 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{k-i}{5} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{n!}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 20 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{k-i}{5} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{20}{5} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (k-i) - \frac{(n+1)!}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 4 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k i - (n+1) \cdot n \\ &= 4 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)}{2} - n(n+1) \\ &= \frac{4}{2} \sum_{k=0}^n k - n(n+1) \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} - n(n+1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usa un cambio de índices y en la tercera y quinta se usa la conocida igualdad $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$.

P3. Relaciones.

a) (2.5 ptos) Sea la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $(a, b)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow a > x \vee (a = x \wedge b \leq y)$. Determine si $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

Solución: 1) Para ver que es orden, tenemos que mostrar que $\mathcal{R}$ es refleja, anti-simétrica y transitiva (0.2 pto).

Como para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $a = a \wedge b = b \Rightarrow a = a \wedge b \geq b \Rightarrow a > a \vee (a = a \wedge b \leq b) \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(a, b)$, sigue que $\mathcal{R}$ es refleja (0.3 pto).

Para ver que es antisimétrica, sean $(a, b), (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ arbitrarios. Tenemos

$$\begin{aligned}
 (a, b)\mathcal{R}(x, y) \wedge (x, y)\mathcal{R}(a, b) &\Leftrightarrow \left(a > x \vee (a = x \wedge b \leq y) \right) \wedge \left(x > a \vee (x = a \wedge y \leq b) \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(a > x \wedge x > a \right) \vee \left(a > x \wedge (x = a \wedge y \leq b) \right) \vee \left(a = x \wedge b \leq y \wedge x > a \right) \\
 &\quad \vee \left((a = x \wedge b \leq y) \wedge (x = a \wedge y \leq b) \right) \\
 &\Leftrightarrow F \vee F \vee F \vee (a = x \wedge b \leq y \wedge y \leq b) \\
 &\Leftrightarrow a = x \wedge b = y \\
 &\Leftrightarrow (a, b) = (x, y).
 \end{aligned}$$

(1 pto).

Para ver transitividad, sean $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrarios con $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(x, y)$. Distinguimos dos casos. Primero, si $a > c$ o $c > x$, entonces $a > x$, y por lo tanto $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$. Segundo, si $a \leq c \wedge c \leq x$, entonces, como $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \wedge (c, d)\mathcal{R}(x, y)$, tenemos que $a = c \wedge b \leq d$ y también $c = x \wedge d \leq y$. Esto implica que $a = x \wedge b \leq y \Leftrightarrow (a, b)\mathcal{R}(x, y)$, y entonces $\mathcal{R}$ es transitiva (1 pto).

b) (1.5 pto) Sea la relación $\sim$ en $\mathbb{N}^2$ dada por

$$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + 2b = x + 2y.$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y determine $[(3, 2)]_{\sim}$ (la clase de equivalencia de $(3, 2)$ bajo $\sim$).

Solución: Para ver que es relación de equivalencia, tenemos que mostrar que $\sim$ es refleja, simétrica y transitiva (0.2 pto).

Como para todo $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ se tiene que $a + 2b = a + 2b$, sabemos que $\sim$ es refleja (0.1 pto).

Para ver que es simétrica, sean $(a, b), (x, y) \in \mathbb{N}^2$ arbitrarios. Tenemos $(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + 2b = x + 2y \Leftrightarrow x + 2y = a + 2b \Leftrightarrow (x, y) \sim (a, b)$. Por lo tanto $\sim$ es simétrica (0.2 pto).

Para ver transitividad, sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2$ arbitrarios. Tenemos $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow a + 2b = c + 2d \wedge c + 2d = e + 2f \Rightarrow a + 2b = e + 2f \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$. Entonces $\sim$ es transitiva (0.2 pto).

Desarrollamos $[(3, 2)]_{\sim} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid (a, b) \sim (3, 2)\} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a + 2b = 3 + 2 \cdot 2 = 7\}$ (0.2 pto). Notamos que para que se satisfaga $a + 2b = 7$ para $a, b \in \mathbb{N}$ es necesario que $a \leq 7$ y que a sea impar (0.2 pto). Además, se tiene que cumplir que $b = \frac{7-a}{2}$ (0.2 pto). Por lo tanto, $[(3, 2)]_{\sim} = \{(1, 3), (3, 2), (5, 1), (7, 0)\}$ (0.2 pto).

c) (2 ptos) Sea $A \in \mathbb{Z}_{29}$. Muestre que A contiene un elemento que es múltiplo de 6.

Solución: Como $A \in \mathbb{Z}_{29}$, sabemos que se pueden escribir como $A = [k]_5$ para cierto $k \in \{0, 1, 2, \dots, 28\}$ (0.2 pto). También sabemos que

$$\begin{aligned} [k]_{29} &= \{j \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z}, j = 29z + k\} \\ &= \{\dots, k - 3 \cdot 29, k - 2 \cdot 29, k - 29, k, k + 29, k + 2 \cdot 29, k + 3 \cdot 29, \dots\} \end{aligned}$$

(0.2 pto). Para mostrar que A contiene un elemento que es múltiplo de 6, hay que encontrar un $a \in A = [k]_{29}$ y un $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 6\ell$ (0.2 pto). Por lo tanto, es suficiente mostrar que existen $z, \ell \in \mathbb{Z}$ tales que $29z + k = 6\ell$ (0.7 pto). Elegimos $z = k$ y $\ell = 5k$ y calculamos: $29z + k = 29k + k = 30k = 6\ell$ (0.7 pto).