

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 3

Indicaciones generales:

- Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.
- Recordar que $\mathbb{N}$ contiene a 0.

P1. Cardinales.

a) (2 ptos) Sea

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \{0, 1, 2, \dots, 100\} \times \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x \wedge z \in \{x, x+1, x+2, \dots, y\} \right\}.$$

Determine $|X|$.

- b) (2.5 ptos) Para $i \in \mathbb{N}$ sea $A_i = \{i\} \times \{0, \pi, 2\pi, \dots, i\pi\}$. Determine el cardinal de $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.
- c) (1.5 ptos) Sean $B_1 = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y $B_2 = (3, 4) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $B_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x \in \mathbb{Z}\}$. Muestre que $|B_1| = |B_2 \setminus B_3|$.
Se puede asumir que B_2 es infinito (sin necesidad de probarlo).

P2. Estructuras algebraicas.

- a) (1 pto) Determine si $\{8z + 5 \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
- b) (1.5 pto) Determine si $\{8z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
- c) (1.5 ptos) Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e , sean $a, b, c \in G$ tales que $c * c = a$ y $c * b = b * c$. Muestre que $a * b = b * a$.
- d) (2 ptos) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, con neutro aditivo 0 y neutro multiplicativo 1. Sea $a \in A \setminus \{0\}$ un elemento que tiene un inverso multiplicativo a^{-1} . Muestre que para todo $b \in A \setminus \{0\}$ se tiene que $a \cdot b \neq 0$.

P3. Complejos.

a) (2 ptos) Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$|4 + i^2| \cdot |z - i|^2 - \frac{3}{i}(z - \bar{z}) = |\sqrt{3}z - \sqrt{3}|^2 \iff \operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z).$$

- b) (1.5 ptos) Calcule $(1 + i)^8 - 18 + 2i$ y escriba el resultado en forma polar y en forma cartesiana.
- c) (2.5 ptos) Determine la cuartas raíces w_1, w_2, w_3, w_4 de i . Calcule $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot w_4 \cdot \overline{-i}$.