



Control 3 - Primavera 2025

P1. a) (3.0 pts.) Sea $z = \frac{5+3i}{2-i}$. Expresé en su forma cartesiana los complejos z , $\bar{z}$, z^{-1} y deduzca $|z|$.

b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$.

1) (1.0 pto.) Demuestre que $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$.

2) (1.0 pto.) Demuestre que $(z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.

3) (1.0 pto.) Usando que para $u \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$, demuestre que $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$.

P2. En $\mathbb{Z}^3$ se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ como sigue.

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{Z}^3, (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

y

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{Z}^3, (a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', ab' + a'b, ac' + a'c).$$

Por ejemplo, $(1, -1, 1) + (2, 3, 0) = (3, 2, 1)$ y $(1, -1, 1) \cdot (2, 3, 0) = (2, 3 - 2, 0 + 2) = (2, 1, 2)$.

a) (2.0 pts.) Asumiendo que la operación $+$ en $\mathbb{Z}^3$ es asociativa y conmutativa, y que la operación $\cdot$ en $\mathbb{Z}^3$ es asociativa y distribuye con respecto a $+$, demuestre que $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

b) (2.0 pts.) Demuestre que para todo $v = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$,

1) v es invertible para $\cdot \iff a \in \{-1, 1\}$.

2) v es divisor de cero $\iff a = 0$.

c) (2.0 pts.) Demuestre que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $G = \{(a, b, c) \mid a = 1, b, c \in \mathbb{Z}\}$, y que $H = \{(1, 2b, 3c) \mid b, c \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $(G, \cdot)$.

P3. a) (3.0 pts.) Asumiendo que los conjuntos B , C y D , dados por

$$B = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \neq b\}, \quad \text{y} \quad D = \{S \mid S \subseteq \mathbb{N} \wedge |S| \leq 2\},$$

son infinitos, demuestre que son numerables.

b) (3.0 pts.) Sea $(V = \{x, b, c, d\}, +, \cdot)$ una estructura algebraica con dos operaciones. En las tablas que siguen, se definen algunos valores de las operaciones $+$ y $\cdot$. El objetivo de esta pregunta es que complete estas tablas para que $(V, +, \cdot)$ sea un anillo conmutativo. Para ello proceda según las siguientes etapas.

1) Use el neutro de $(V, +)$ y la noción de absorbente para llenar las entradas que lo involucran en la tabla $(V, \cdot)$.

2) Muestre que d es el neutro de $(V, \cdot)$ y llene las celdas asociadas en la tabla de $(V, \cdot)$.

3) Use la distributividad para mostrar que $b \cdot b = (x + d) \cdot b = d$ y que $x \cdot x = x \cdot (b + b) = c$, y termine de completar la tabla de $(V, \cdot)$.

+	x	b	c	d
x	c	d	x	b
b	d	x	b	c
c	x	b	c	d
d	b	c	d	x

y

·	x	b	c	d
x		x		
b				
c				
d		b		

Tiempo: 3.0 hrs.