

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 2

Indicación general: Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.

P1. Conjuntos imagen y preimagen/Coeficientes binomiales.

a) Sea $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$.

1) (0.7 pto) Determine $f(\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N} \times \{4, 5, 6\})$.

2) (1.8 pto) Encuentre A_i, B_i, C_i para $i = 1, \dots, 4$ tal que

$$f^{-1}(\{0, \frac{1}{2}, 1\}) = \bigcup_{i=1}^4 (A_i \times B_i \times C_i).$$

b) (2 ptos) Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones, con g inyectiva. Sea $X \subseteq B$ con $f(f^{-1}(X)) \neq X$. Muestre que $g \circ f$ no es epiyectiva.

c) (1.5 ptos) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ se tiene que $\binom{n}{k}$ es impar. Muestre que $\binom{n+1}{k}$ es par para todo $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$.

P2. Sumatorias y coeficientes binomiales.

a) (3 ptos)

$$3^{2n} \sum_{k=n}^{2n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \frac{2^{k-n}}{3^k}$$

b) (3 ptos) Calcule para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$,

$$20 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{k-i}{5} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{n!}$$

P3. Relaciones.

a) (2.5 ptos) Sea la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $(a, b)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow a > x \vee (a = x \wedge b \leq y)$. Determine si $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

b) (1.5 pto) Sea la relación $\sim$ en $\mathbb{N}^2$ dada por

$$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + 2b = x + 2y.$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y determine $[(3, 2)]_{\sim}$ (la clase de equivalencia de $(3, 2)$ bajo $\sim$).

c) (2 ptos) Sea $A \in \mathbb{Z}_{29}$. Muestre que A contiene un elemento que es múltiplo de 6.