



Control 2 - Primavera 2025

P1. a) Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$ una función. Para cada una de las siguientes proposiciones, determine si es verdadera (mediante una demostración) o falsa (proporcionando un contraejemplo).

1) (1.5 pts.) $\forall A' \subseteq A, f((A')^c) = (f(A'))^c$.

2) (1.5 pts.) $\forall B' \subseteq B, f^{-1}((B')^c) = (f^{-1}(B'))^c$.

b) (3.0 pts.) Calcule

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} (2^j - 3^j).$$

P2. a) (2.0 pts.) Dibuje el digrafo de una relación de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cuyo conjunto cociente es

$$\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5, 6\}\}.$$

b) (2.0 pts.) Demuestre que la relación R en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por xRy si y sólo si $y/x \geq 1$ y $y/x \in \mathbb{Q}$ es de orden y determine si es un orden total.

c) (2.0 pts.) Demuestre que la relación S en $\mathbb{R}$ dada por xSy si y sólo si $y - x \in \mathbb{Q}$ es de equivalencia. Además determine la clase de equivalencia de 0 y demuestre que la clase de $\sqrt{2}$ y la de $\sqrt{2} + 1/2$ coinciden.

P3. a) (1.5 pts.) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^4 - i^4 = (n+1)^4 - 1.$$

b) (1.5 pts.) Sin usar inducción, dé una demostración de la igualdad

$$\sum_{i=1}^n i^3 = (n(n+1))^2/4.$$

Indicación: Puede usar las fórmulas conocidas de las sumatorias $\sum_{i=1}^n i$ y $\sum_{i=1}^n i^2$, y la parte anterior.

c) (3.0 pts.) Sea A un conjunto finito y C un subconjunto de A . Use las herramientas conocidas de cardinales finitos para calcular el cardinal del conjunto E dado por

$$E = \{(a, a') \in A \times A \mid a \notin C \vee a' \notin C\}.$$

Tiempo: 3.0 hrs.