

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 1

Tiempo: 3 horas.

Indicación general: Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.

P1. Cuantificadores e Inducción.

a) (3 pts) Determine si lo siguiente es verdadero o falso:

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, (x+1)y + 10 \geq 0.$$

Solución: Es falso. Para probar esto, demostraremos que la negación de la afirmación es verdadera (0.5 pts). La negación es: $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}, (x+1)y + 10 < 0$ (0.5 pts).

Dado $x \in \mathbb{N}$ arbitrario, elegimos $y = -11 \in \mathbb{Z}$ (1 pts), y calculamos

$$(x+1)y + 10 = (x+1)(-11) + 10 = -11x - 1 < 0$$

(0.5 pts) donde la última desigualdad se tiene porque

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow -11x \leq 0 \Rightarrow -11x - 1 < 0$$

(0.5 pts).

b) (3 pts) Usando inducción, pruebe que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 6$ se tiene que

$$\frac{2^n}{5} - \frac{10}{n} - 1 \geq n.$$

Solución: La afirmación se prueba con inducción en n , empezando con el caso base $n = 6$, para el cuál se verifica que

$$\frac{2^6}{5} - \frac{10}{6} - 1 = \frac{64}{5} - \frac{10}{6} - 1 \geq 6$$

(0.6 pts). Para el paso inductivo, deduciremos la afirmación

$$\frac{2^n}{5} - \frac{10}{n} - 1 \geq n$$

para $n \geq 6$ de la hipótesis de la inducción

$$\frac{2^{n-1}}{5} - \frac{10}{n-1} - 1 \geq n-1$$

(0.7 pto). Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{5} - \frac{10}{n} - 1 &= \frac{2^{n-1}}{5} + \frac{2^{n-1}}{5} - \frac{10}{n-1} + \frac{10}{n(n-1)} - 1 \\ &\geq \frac{2^{n-1}}{5} - \frac{10}{n-1} - 1 + \frac{2^{n-1}}{5} \\ &\stackrel{HI}{\geq} n-1 + \frac{2^{n-1}}{5} \\ &\geq n-1+1 \\ &\geq n, \end{aligned}$$

(1.2 pto) donde la penúltima desigualdad vale porque $n \geq 6 \Rightarrow \frac{2^{n-1}}{5} \geq \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5} \geq 1$
(0.5 pto).

P2. Conjuntos.

a) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1) (2 ptos) Para todos conjuntos $A, B, C \subseteq E$, se tiene

$$(A \cup B)^C \cup (B \cap C) \subseteq (A \setminus B)^C.$$

Solución: Es verdadero (0.2 pto si se justifica con diagrama de Venn o con un desarrollo como el siguiente). Desarrollamos:

$$(A \cup B)^C \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B)^C \cup B = ((A \cup B) \cap B^C)^C = ((A \cap B^C) \cup (B \cap B^C))^C = ((A \setminus B) \cup \emptyset)^C = (A \setminus B)^C$$

o alternativamente,

$$\begin{aligned} (A \cup B)^C \cup (B \cap C) &= (A^C \cap B^C) \cup (B \cap C) \subseteq (A^C \cap B^C) \cup B = (A^C \cup B) \cap (B^C \cup B) = \\ &= (A^C \cup B) \cap E = A^C \cup B = (A \cap B^C)^C = (A \setminus B)^C \end{aligned}$$

(1.8 pto).

2) (1.5 pto) Para todos conjuntos $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, se tiene

$$C \setminus (A \Delta B) = (A \cap C) \cup (C \setminus B).$$

Solución: Es falso (0.2 pto si se justifica con diagrama de Venn o con un contraejemplo como el siguiente). Consideramos conjuntos $A = \mathbb{N}$, $C = \mathbb{N}$, $B = \emptyset$. (0.5 pto por ejemplos concretos correctos). Observamos que para esta elección de A, B, C se tiene $C \setminus (A \triangle B) = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \triangle \emptyset) = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset \neq \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = (\mathbb{N} \cap \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus \emptyset) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$ (0.8 pto por mostrar que los conjuntos elegidos no cumplen con la afirmación).

b) Sean $C_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $C_2 = \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ y $C_3 = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \not\subseteq \mathbb{N} \wedge A \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$.

1) (0.5 pto) Muestre que $C_1 \cap C_3 = \emptyset$.

2) (2 ptos) Asumiendo 1) y asumiendo que $C_2 \cap C_3 = \emptyset$, pruebe que $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ es una partición de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Solución: 1) Para mostrar por contradicción que $C_1 \cap C_3 = \emptyset$, asumimos que existe un elemento $X \in C_1 \cap C_3$, es decir $X \in C_1 \wedge X \in C_3$, lo que equivale a $X \subseteq \mathbb{N} \wedge (X \subseteq \mathbb{Z} \wedge X \not\subseteq \mathbb{N} \wedge X \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$. Esto implica que $X \subseteq \mathbb{N} \wedge X \not\subseteq \mathbb{N} \Leftrightarrow X \subseteq \mathbb{N} \wedge \overline{X} \subseteq \overline{\mathbb{N}} \Leftrightarrow F$ (0.5 pto).

2) Hay que verificar las tres propiedades: I) $\emptyset \notin \mathcal{C}$, II) los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos, III) los elementos de $\mathcal{C}$ cubren a $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (0.3 pto). Se observa que I) vale porque por ejemplo, $\{0\} \in C_1$, $\{-1\} \in C_2$, $\{0, -1\} \in C_3$ (0.5 pto).

Como se asume $C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \emptyset$, solo falta ver que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ para asegurar II) (0.1 pto). Por una propiedad de los apuntes se tiene $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$. Aplicando este hecho a $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ se obtiene que $C_1 \cap C_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cap (\mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) \setminus \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$ (0.5 pto).

Falta ver III). Para esto, necesitamos mostrar que para cada $X \subseteq \mathbb{Z}$ existe un $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $X \in C_i$ (0.1 pto). Dado $X \subseteq \mathbb{Z}$ arbitrario, distinguimos tres casos: Primero, si $X \subseteq \mathbb{N}$ (lo que incluye el caso $X = \emptyset$), se observa que $X \in C_1$. Segundo, si $X \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ y $X \neq \emptyset$, se observa que $X \in C_2$. Tercero, si $X \not\subseteq \mathbb{N} \wedge X \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, se tiene que $X \in C_3$ (0.5 pto).

P3. Funciones.

a) (2.5 ptos) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x - 1$. Determine si f es inyectiva y si f es epiyectiva.

Solución: La función f es inyectiva (0.1 pto) porque dados $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ arbitrarios con $f(x_1) = f(x_2)$, se tiene que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (0.5 pto): Efectivamente, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (0.4 pto).

La función f no es epiyectiva (0.1 pto). Para ver esto, tenemos que mostrar que existe un $y \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que $f(x) \neq y$ (0.5 pto). Tomamos

$y = 0$ (0.3 pto). Sea $x \in \mathbb{Z}$ arbitrario, entonces $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (0.3 pto), una contradicción al hecho que $x \in \mathbb{Z}$ (0.3 pto).

- b) Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})$. Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ dadas por

$$f(x, n) = (-n - 1, n^2x), \quad g(z, x) = \left(\frac{x}{(z+1)^2}, -z - 1 \right).$$

- 1) (2.5 pto) Muestre que f es biyectiva y que g es su inversa.
- 2) (1 pto) Sea $h : A \rightarrow B$ una función inyectiva. ¿Es $(g \circ (f \circ g)) \circ h$ inyectiva?

Solución: 1) Por una proposición de los apuntes, es suficiente mostrar que $g \circ f = id_{\mathbb{R} \times \mathbb{N}^*}$ y $f \circ g = id_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}}$ (0.6 pto). Efectivamente $g \circ f : \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ y $f \circ g : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}$ (0.3 pto), y además,

$$\begin{aligned} g \circ f(x, n) &= g(f(x, n)) = g(-n - 1, n^2x) = \left(\frac{n^2x}{(-n - 1 + 1)^2}, -(-n - 1) - 1 \right) \\ &= (x, n) \\ &= id_{\mathbb{R} \times \mathbb{N}^*}(x, n) \end{aligned}$$

(0.8 pto) y

$$\begin{aligned} f \circ g(z, x) &= f(g(z, x)) = f\left(\frac{x}{(z+1)^2}, -z - 1\right) = \left(-(-z - 1) - 1, (-z - 1)^2 \frac{x}{(z+1)^2} \right) \\ &= (z, x) \\ &= id_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}}(z, x). \end{aligned}$$

(0.8 pto).

2) Por proposiciones de los apuntes: Siendo la inversa de f , la función g es biyectiva (0.3 pto). Como f y g son biyectivas, su composición $f \circ g$ es biyectiva (0.2 pto). Por la misma razón, $g \circ (f \circ g)$ es biyectiva y en particular, es inyectiva (0.2 pto). La composición de esta función con la función inyectiva h es inyectiva (0.3 pto).