

MA1101: Introducción al Álgebra
Semestre Verano 2025, Profesora M. Stein

Control 1

Tiempo: 3 horas.

Indicación general: Cada respuesta tiene que ser adecuadamente justificada.

P1. Cuantificadores e Inducción.

- a) (3 pts) Determine si lo siguiente es verdadero o falso:

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}, (x+1)y + 10 \geq 0.$$

- b) (3 pts) Usando inducción, pruebe que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$ se tiene que

$$\frac{2^n}{5} - \frac{10}{n} - 1 \geq n.$$

P2. Conjuntos.

- a) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- 1) (2 pts) Para todos conjuntos $A, B, C \subseteq E$, se tiene

$$(A \cup B)^C \cup (B \cap C) \subseteq (A \setminus B)^C.$$

- 2) (1.5 pto) Para todos conjuntos $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, se tiene

$$C \setminus (A \triangle B) = (A \cap C) \cup (C \setminus B).$$

- b) Sean $C_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $C_2 = \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ y $C_3 = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \not\subseteq \mathbb{N} \wedge A \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$.

- 1) (0.5 pto) Muestre que $C_1 \cap C_3 = \emptyset$.

- 2) (2 pts) Asumiendo 1) y asumiendo que $C_2 \cap C_3 = \emptyset$, pruebe que $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ es una partición de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

P3. Funciones.

- a) (2.5 pts) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x - 1$. Determine si f es inyectiva y si f es epiyectiva.

- b) Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})$. Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ dadas por

$$f(x, n) = (-n - 1, n^2 x), \quad g(z, x) = \left(\frac{x}{(z+1)^2}, -z - 1 \right).$$

- 1) (2.5 pts) Muestre que f es biyectiva y que g es su inversa.

- 2) (1 pto) Sea $h : A \rightarrow B$ una función inyectiva. ¿Es $(g \circ (f \circ g)) \circ h$ inyectiva?