Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Avanzado y Aplicaciones, MA2002 - Otoño 2025
Jueves 20 de Noviembre

PAUTA CONTROL 3

P1. a) (3 puntos) Calcule la integral definida por

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}\,dx,$$

donde α es un número real positivo.

Solución

ea $f(z) = \dfrac{1}{(z^4+1)(z^2+\alpha^2)^2}$. f es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en 6 polos, ninguno de los cuales está en la recta real.
f tiene en el semiplano superior los polos simples:

$$z_1 = \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_2 = \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

y el polo doble $z_3 = i\alpha$.
(0.5 puntos)
Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_2} f(z) + \mathrm{Res}_{z=z_3} f(z)\right).$$

(0.5 puntos)
Como $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z+z_1)(z+z_2)(z^2+\alpha^2)^2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \\
&= \lim_{z-z_1} \frac{1}{(z-z_2)(z+z_1)(z+z_2)(z^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{(z_1-z_2)(2z_1)(z_1+z_2)(z_1^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{2z_1(z_1^2-z_2^2)(z_1^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)(2i)(i+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4i(1+i)(i+\alpha^2)^2}
\end{aligned}$$

(0.5 puntos)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) \\
&= \lim_{z - z_2} \frac{1}{(z-z_1)(z+z_1)(z+z_2)(z^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2+z_1)(2z_2)(z_2^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{(z_2^2-z_1^2)(2z_2)(z_1^2+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{1}{(-2i)(\sqrt{2})(-1+i)(-i+\alpha^2)^2} \\
&= \frac{-\sqrt{2}}{4i(-1+i)(-i+\alpha^2)^2}
\end{aligned}
$$

(0.5 puntos)
Por lo que

$$
\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{\sqrt{2}(\alpha^4 2\alpha^2 - 1)}{4i(\alpha^4+1)^2}
$$

Por otro lado, como $z_3 = i\alpha$ es polo doble, entonces:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_3} f(z) &= \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz} \left[(z-z_3)^2 f(z)\right] \\
&= \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z^4+1)(z+i\alpha)^2}\right] \\
&= \lim_{z \to z_3} \frac{-4z^3(z+i\alpha)^2 - 2(z^4+1)(z+i\alpha)}{\left((z^4+1)(z+i\alpha)^2\right)^2} \\
&= \frac{-4i\alpha(5\alpha^4+1)}{\left((4\alpha^2(\alpha^4+1)\right)^2}
\end{aligned}
$$

(0.5 puntos)
Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_3} f(z)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}(\alpha^4 2\alpha^2 - 1)}{4i(\alpha^4+1)^2} + \frac{-4i\alpha(5\alpha^4+1)}{\left((4\alpha^2(\alpha^4+1)\right)^2} \right) \\
&= \pi \frac{5\alpha^4 + 1 + \alpha^3\sqrt{2}(\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1)}{2\alpha^3(\alpha^4+1)^2}
\end{aligned}
$$

(0.5 puntos)

b) (3 puntos) Calcule la integral

$$
I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\sin t} dt.
$$

Solución

Considerando $z = e^{it}$, se tiene

$$
\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right). \quad \textbf{(0.5 puntos)}
$$

Luego,

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \dfrac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}\, dz.$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}, \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

tiene tres polos: un polo doble $z=0$ y dos simples: $z=2i$ y $z=i/2$. Esto es cierto porque $z=2i$ y $z=i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2+5iz+2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2+5iz+2 = -2\left(z-\frac{i}{2}\right)(z-2i)$$

y por tanto

$$f(z) = \frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)} = \frac{z^4+1}{2z^2\left(-2\left(z-\dfrac{i}{2}\right)(z-2i)\right)}, \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

dos de los polos se encuentran dentro de la circunferencia $|z|=1$: el polo simple $i/2$ y el doble $z=0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), obtenemos:

$$\operatorname{Res}\left(f;\frac{i}{2}\right) = \frac{17i}{24}, \quad \operatorname{Res}(f;0) = \frac{-5i}{8}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Por lo tanto, por el teorema de los residuos

$$I = 2\pi\left(\operatorname{Res}\left(f;\frac{i}{2}\right) + \operatorname{Res}(f;0)\right) = -\frac{\pi}{6}. \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

P2. a) (3 puntos) Obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t)=t^2-t$ en el intervalo $[-L,L]$ derivando su extensión periódica con periodo $2L$.

Solución

La función es de clase C^2, por lo que su serie de Fourier converge a ella.**(0.3 puntos)** Los coeficientes de Fourier de la función vendrán dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(t^2-t)\,dt = \frac{2L^2}{3}, \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(t^2-t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)dt$$

(0.5 puntos)

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(t^2 - t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{L} t^2\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt - \int_{-L}^{L} t\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[\left(t^2\,\frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} 2t\,\frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt\right)\right.$$
$$\left. - \left(t\,\frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} \frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt\right)\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[0 - \frac{2L}{k\pi}\int_{-L}^{L} t\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt - 0 + \frac{L}{k\pi}\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt\right] = \frac{4(-1)^k L^2}{k^2\pi^2},.$$

(0.5 puntos)

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(t^2 - t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{2L(-1)^k}{k\pi}.$$

(1 punto)

De modo que la serie de Fourier de la función será:

$$f(t) = \frac{L^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^m L^2}{m^2\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + \frac{2L(-1)^m}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right)\right).$$

(0.2 puntos)

b) (3 puntos) Una función f satisface las dos condiciones

$$f(-x) = f(x) \quad \text{y} \quad f(x+\pi) = -f(x) \quad \text{para todo } x.$$

Demostrar que sus coeficientes de Fourier cumplen

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \cdots = 0.$$

Solución

Los coeficientes de Fourier (en el intervalo $[-\pi, \pi]$) vienen dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

1. Cálculo de b_n. Como f es par, $f(x)\sin(nx)$ es función impar para todo n. Por tanto

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0 \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

De aquí se obtiene $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$. **(1.5 puntos)**

2. Anulación de a_0 y de los a_{2m}. Sea $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consideremos

$$I_{2m} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2mx)\,dx.$$

Haciendo el cambio de variable $y = x + \pi$ **(0.5 puntos)** en la integral:

$$I_{2m} = \int_{-\pi}^{\pi} f(y-\pi)\cos\big(2m(y-\pi)\big)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y+\pi)\cos(2my)\,dy,$$

ya que $\cos(2m(y-\pi)) = \cos(2my)$. Usando $f(y+\pi) = -f(y)$ obtenemos

$$I_{2m} = \int_{-\pi}^{\pi} (-f(y)) \cos(2my)\, dy = -I_{2m}. \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Por tanto $I_{2m} = 0$. En particular, tomando $m = 0$ se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0, \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

y para $m \geq 1$ resulta

$$a_{2m} = \frac{1}{\pi} I_{2m} = 0.$$

Así $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$.

Conclusión. Combinando las dos observaciones anteriores se concluye que

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0 \qquad \text{y} \qquad b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0,$$

como se quería demostrar.

P3. a) (3 puntos) Sea g una función tal que $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$. Demuestre que

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(\frac{x-y}{2})^2} dy$$

Indicación: $\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-s^2/4}$.

Solución

Consideremos la hipótesis $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$:

$$\begin{aligned}
\iff \mathcal{F}(g)(s) &= \mathcal{F}(f)(s) \cdot e^{-\frac{(2s)^2}{4}} \\
&= \sqrt{2} \cdot \mathcal{F}(f)(s) \cdot \mathcal{F}(e^{-x^2})(2s) && \text{(Indicación)} \\
&= \sqrt{2} \cdot \mathcal{F}(f)(s) \cdot \mathcal{F}(e^{-x^2})(\frac{s}{1/2}) \\
&= \sqrt{2} \cdot \mathcal{F}(f)(s) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}(e^{-(x/2)^2})(s) && \text{(Cambio Escala } a = 1/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathcal{F}(f)(s) \cdot \mathcal{F}(e^{-(x/2)^2})(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathcal{F}(f(x) * e^{-(x/2)^2})(s) && \text{(Convolución)}
\end{aligned}$$

(2.0 puntos)
Aplicando antitransformada se obtiene que

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot f(x) * e^{-(x/2)^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(\frac{x-y}{2})^2} dy
\end{aligned}$$

(1.0 punto)

b) (3 puntos) Calcule la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^3 - x^2 + 4x - 4}.$$

Solución

Usamos la definicion

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-isy} dy$$

Dado que

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4),$$

por lo que

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{(x-1)(x^2+4)} \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Por otro lado, podemos descomponer en fracciones parciales

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Tras el cálculo de los coeficientes ($A = 1/5$, $B = -1/5$, $C = -1/5$), obtenemos:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+4}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}\right)$$

Usamos la identidad $\cos(\pi x) = \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2}$. La transformada de Fourier $\hat{f}(s)$ se calcula mediante el **Teorema de Traslación de Frecuencia**:

$$\mathcal{F}\{e^{iax} g(x)\}(s) = \hat{g}(s-a)$$

Aplicando esto a $f(x)$:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i\pi x} g(x) + e^{-i\pi x} g(x)\right)\right\}(s)$$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}(s-\pi) + \hat{g}(s+\pi)\right)$$

Calculamos $\hat{g}(s) = \mathcal{F}\{g(x)\}(s)$ usando las transformadas conocidas:

1) $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x-1}\right\}(s) = -i\sqrt{2\pi} e^{-is} H(-s)$ **(0.5 puntos)**

2) $\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+4}\right\}(s) = -i\sqrt{2\pi}\frac{1}{2} e^{-2|s|} \mathrm{sgn}(s)$ **(0.5 puntos)**

3) $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+4}\right\}(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-2|s|}$ **(0.5 puntos)**

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de $g(x)$:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{5}\left[\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x-1}\right\}(s) - \mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+4}\right\}(s) - \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+4}\right\}(s)\right]$$

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{5}\left[-i\sqrt{2\pi} e^{-is} H(-s) - \left(-i\sqrt{2\pi}\frac{1}{2} e^{-2|s|}\mathrm{sgn}(s)\right) - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-2|s|}\right)\right]$$

$$\hat{g}(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{5}\left[-ie^{-is}H(-s) + i\frac{1}{2}e^{-2|s|}\text{sgn}(s) - \frac{1}{4}e^{-2|s|}\right]$$

Sustituimos $\hat{g}(s)$ en la expresión $\hat{f}(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}(s-\pi) + \hat{g}(s+\pi)\right)$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{5}\left\{\left[-ie^{-i(s-\pi)}H(-(s-\pi)) + i\frac{1}{2}e^{-2|s-\pi|}\text{sgn}(s-\pi) - \frac{1}{4}e^{-2|s-\pi|}\right] + \right.$$

$$\left.\left[-ie^{-i(s+\pi)}H(-(s+\pi)) + i\frac{1}{2}e^{-2|s+\pi|}\text{sgn}(s+\pi) - \frac{1}{4}e^{-2|s+\pi|}\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{10}\Big[&-i\left(e^{-i(s-\pi)}H(\pi - s) + e^{-i(s+\pi)}H(-\pi - s)\right)\\ &+i\frac{1}{2}\left(e^{-2|s-\pi|}\text{sgn}(s-\pi) + e^{-2|s+\pi|}\text{sgn}(s+\pi)\right)\\ &-\frac{1}{4}\left(e^{-2|s-\pi|} + e^{-2|s+\pi|}\right)\Big] \quad \textbf{(0.5 puntos)}\end{aligned}$$

Donde $H(s)$ es la función escalón de Heaviside y $\text{sgn}(s)$ es la función signo, definidas por

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

Nota: Para maneras alternativas de resolverlo considerar: 1 punto por re-escribir la integral a resolver de un modo que permita separarla en una suma de funciones N a las que se les puede calcular su transformada. 1,5/N puntos por el calculo de cada una de estas transformadas. 0.5 por conluir el resultado, en esta parte no descontar por errores de arrastre. Si para el calculo de la transformada $\mathcal{F}\{1/x - 1\}(s)$ se usa variable compleja, evaluar con 0.4 puntos si la integral está bien calculada para algunos valores de s, por ejemplo $s > 0$, y se dejaron casos sin estudiar, por ejemplo $s < 0$.

Observación para Ayudantes

En esta pregunta se puede dejar expresada la transformada sin necesidad de llamar a la función $H(s)$ 0 $sgn(s)$.