Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo en Varias Variables MA2001-2025-2

Control 3

P1. (6.0 ptos.) Encuentre los valores extremos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

En cada caso, identifique el valor extremo correspondiente y justifique el método utilizado.

Solución: Consideramos el Lagrangiano dado por

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1 (x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) - \lambda_2 (x^2 + y^2 - 1).$$

(0.5 pts; Escritura correcta de $\mathcal{L}$ con las dos restricciones)

Los puntos críticos se obtienen resolviendo el sistema

$$\nabla \mathcal{L} = 0,$$

es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_1 y - 2\lambda_2 x = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_1 x - 2\lambda_2 y = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z + 2\lambda_1 z = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

(0.5 pts; Cálculo correcto de las 5 ecuaciones)

De la tercera ecuación se obtiene

$$2z(1 + \lambda_1) = 0,$$

por lo que distinguimos dos casos.

Caso 1: $z = 0$.

En este caso, las dos últimas ecuaciones se reducen a

$$x^2 - xy + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$-xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad xy = 0.$$

Por tanto, o bien $x = 0$ o bien $y = 0$.

- Si $x = 0$, de $x^2 + y^2 = 1$ se deduce $y = \pm 1$.

- Si $y = 0$, de $x^2 + y^2 = 1$ se deduce $x = \pm 1$.

En ambos subcasos, al sustituir en las dos primeras ecuaciones se obtiene $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Así, los puntos críticos correspondientes (incluyendo multiplicadores) son

$$(0, 1, 0, 0, 1), \quad (0, -1, 0, 0, 1), \quad (1, 0, 0, 0, 1), \quad (-1, 0, 0, 0, 1),$$

y, a nivel de la función f, los puntos

$$(0, 1, 0),\ (0, -1, 0),\ (1, 0, 0),\ (-1, 0, 0).$$

(2.0 pts; Uso correcto de las restricciones y hallazgo de los 4 puntos)

Caso 2: $\lambda_1 = -1$.
Sustituyendo $\lambda_1 = -1$ en las dos primeras ecuaciones,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies 2x + 2x + y - 2\lambda_2 x = 0 \implies (4 - 2\lambda_2)x + y = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \implies 2y + 2y + x - 2\lambda_2 y = 0 \implies (4 - 2\lambda_2)y + x = 0.$$

Suponiendo $x \neq 0$ y $y \neq 0$, podemos despejar

$$y = -(4 - 2\lambda_2)x, \qquad x = -(4 - 2\lambda_2)y.$$

Multiplicando ambas expresiones se obtiene

$$xy = (4 - 2\lambda_2)^2 xy.$$

Como $xy \neq 0$ en este caso, deducimos

$$(4 - 2\lambda_2)^2 = 1 \quad \implies \quad 4 - 2\lambda_2 = \pm 1.$$

De aquí se obtienen los posibles valores de λ_2, pero no es necesario determinarlos explícitamente para encontrar (x, y, z). Es más conveniente usar directamente las restricciones.
De las restricciones

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1,$$

sustituyendo z^2 desde la segunda,

$$z^2 = x^2 - xy + y^2 - 1.$$

Restando la primera ecuación de esta expresión se obtiene

$$z^2 = -xy.$$

Puesto que $z^2 \geq 0$, esto implica $xy \leq 0$. Además, de la igualdad de expresiones para λ_2 (por ejemplo, a partir de la forma original de las ecuaciones) se deduce $x^2 = y^2$, es decir,

$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \quad \implies \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La condición $xy \leq 0$ obliga a tomar signos opuestos en x e y, de modo que

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Finalmente, usando $z^2 = -xy = \frac{1}{2}$, se tiene

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, obtenemos cuatro puntos críticos adicionales:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

con $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \frac{5}{2}$.

(2.0 pts; Resolución del sistema y hallazgo de los 4 puntos)

Evaluación de f y clasificación de extremos.
La función a optimizar es $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Evaluamos en los puntos críticos:

$$\begin{aligned}
f(0, \pm1, 0) &= 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1, \\
f(\pm1, 0, 0) &= 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \\
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}, \\
f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Las restricciones describen un conjunto compacto (la intersección de la esfera $x^2 + y^2 = 1$ con un cilindro cuadrático en (x, y, z)), por lo que f alcanza en él sus extremos absolutos. Comparando los valores obtenidos, concluimos:

- Los puntos
$$(0, \pm1, 0), \quad (\pm1, 0, 0)$$
son **puntos de mínimo absoluto**, con valor $f = 1$.
- Los puntos
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
son **puntos de máximo absoluto**, con valor $f = \dfrac{3}{2}$.

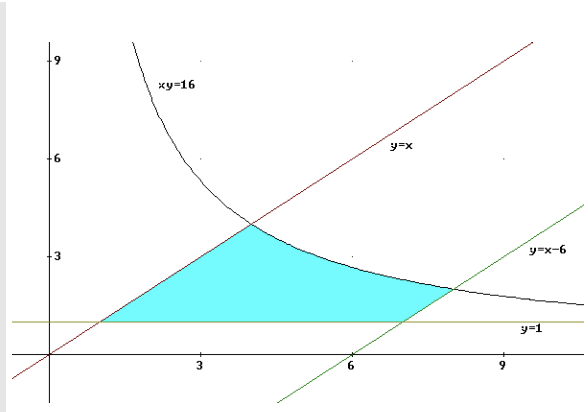
(1.0 pts; Valores $f = 1$ y $f = \frac{3}{2}$ y clasificación de extremos absolutos)

P2. (6.0 ptos.) Considere la región

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \leq 16,\ x \geq y,\ x - 6 \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 1\right\}.$$

a) (2.0 ptos.) Dibuje la región $\mathcal{D}$ indicando claramente todas las curvas que la delimitan.

Solución:



(2.0 pts; Por graficar correctamente la figura indicando cada una de las curvas)

b) (4.0 ptos.) Calcule, utilizando coordenadas cartesianas, la integral doble

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y}\, dx\, dy.$$

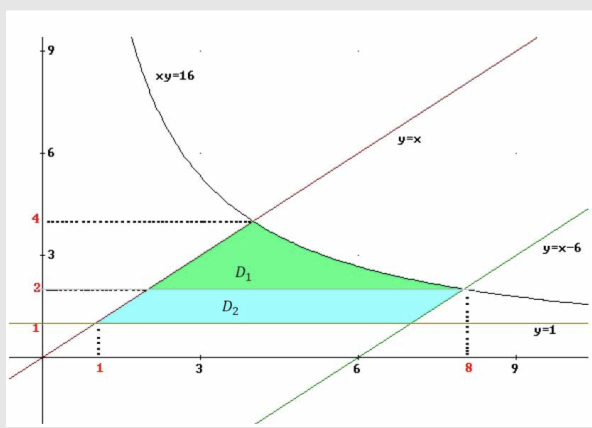
Justifique adecuadamente los límites de integración que utilice.

Solución: Para calcular la integral, describimos la región $\mathcal{D}$ proyectándola sobre el eje y y tomando x como variable dependiente. De acuerdo con el esquema de la figura, conviene descomponer

$$\mathcal{D} = D_1 \cup D_2,$$

donde

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \le y + 6,\ 1 \le y \le 2\right\}, \qquad D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \le \frac{16}{y},\ 2 \le y \le 4\right\}.$$



(1.0 pts; Descripción correcta de D_1, D_2 y rangos de y)

De este modo, la integral se escribe como

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y}\, dx\, dy = \iint_{D_1} \frac{x}{y}\, dx\, dy + \iint_{D_2} \frac{x}{y}\, dx\, dy.$$

Cálculo sobre D_1. Para D_1 se tiene

$$\iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_{y=1}^{2} \int_{x=y}^{y+6} \frac{x}{y}\,dx\,dy.$$

Calculamos primero la integral interna:

$$\int_{x=y}^{y+6} \frac{x}{y}\,dx = \frac{1}{y}\int_{x=y}^{y+6} x\,dx = \frac{1}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=y+6} = \frac{(y+6)^2 - y^2}{2y} = \frac{12y+36}{2y} = 6 + \frac{18}{y}.$$

Por tanto,

$$\iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(6 + \frac{18}{y}\right) dy = [6y + 18\ln|y|]_1^2 = (12 + 18\ln 2) - (6 + 18\ln 1) = 6 + 18\ln 2.$$

(1.0 pts; Por calcular bien la integral defiendo correctamente los límites de integración)

Cálculo sobre D_2. Para D_2 escribimos

$$\iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_{y=2}^{4} \int_{x=y}^{\frac{16}{y}} \frac{x}{y}\,dx\,dy.$$

La integral interna queda

$$\int_{x=y}^{16/y} \frac{x}{y}\,dx = \frac{1}{y}\int_{x=y}^{16/y} x\,dx = \frac{1}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=16/y} = \frac{1}{2y}\left(\frac{256}{y^2} - y^2\right) = \frac{128}{y^3} - \frac{y}{2}.$$

Entonces

$$\iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_2^4 \left(\frac{128}{y^3} - \frac{y}{2}\right) dy = \left[-\frac{64}{y^2} - \frac{y^2}{4}\right]_2^4.$$

Evaluando,

$$-\frac{64}{4^2} - \frac{4^2}{4} = -4 - 4 = -8, \qquad -\frac{64}{2^2} - \frac{2^2}{4} = -16 - 1 = -17,$$

por lo que

$$\iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dx\,dy = (-8) - (-17) = 9.$$

(1.0 pts; Por calcular bien la integral defiendo correctamente los límites de integración)

Sumando las dos contribuciones,

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dx\,dy + \iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dx\,dy = (6 + 18\ln 2) + 9 = 15 + 18\ln 2.$$

(1.0 pts; Resultado numérico correcto)

P3. (6.0 ptos.) Determine el volumen del sólido **ubicado en el primer octante** y delimitado por las superficies

$$\begin{cases} z = 1 - y^2, \\ y = 2x, \\ x = 3. \end{cases}$$

Solución: Como se pide el volumen del sólido, debemos calcular

$$V = \iiint_D 1\, dV,$$

donde D es la región en el espacio delimitada por las superficies dadas y el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

(0.5 pts; Uso del primer octante y de la definición de volumen)

Determinemos los límites de integración. La superficie superior viene dada por

$$z = 1 - y^2,$$

y en el primer octante tenemos $z \geq 0$, por lo que

$$1 - y^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq y \leq 1.$$

(1.0 pts; Intervalo adecuado para y)

Para cada valor fijo de y en este intervalo, z varía entre el plano $z = 0$ y la superficie $z = 1 - y^2$, es decir:

$$0 \leq z \leq 1 - y^2.$$

(1.0 pts; Intervalo adecuado para z en función de y)

Las otras dos superficies son

$$y = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y}{2}, \qquad x = 3.$$

En el primer octante y para $0 \leq y \leq 1$, esto implica que, para cada y fijo,

$$\frac{y}{2} \leq x \leq 3.$$

(1.0 pts; Uso correcto de las superficies laterales)

En resumen, una descripción conveniente de D es

$$D = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 1 - y^2 \right\}.$$

(1.0 pts; Determinación de los límites de integración)

Ahora, calculemos el volumen. Con la elección de orden $dz\,dx\,dy$, el volumen es

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_D 1\,dV &= \int_{y=0}^{1}\int_{x=y/2}^{3}\int_{z=0}^{1-y^2} 1\,dz\,dx\,dy. \\
&= \int_0^1\int_{y/2}^{3}\big[(z)\big]_0^{1-y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1\int_{y/2}^{3}(1-y^2)\,dx\,dy. \\
&= \int_0^1 (1-y^2)\,[x]_{x=y/2}^{x=3}\,dy \\
&= \int_0^1 (1-y^2)\left(3-\frac{y}{2}\right)\,dy. \\
&= \int_0^1 \left(3-3y^2-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{2}\right)\,dy. \\
&= \left[3y-y^3-\frac{y^2}{4}+\frac{y^4}{8}\right]_0^1 \\
&= 3-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\
&= \frac{15}{8}.
\end{aligned}
$$

(1.5 pts; Cálculo algebraico y resultado correcto)

Duración: 3h.