Control 3 - Primavera 2025

P1. *a)* (3.0 pts.) Sea $z = \frac{5+3i}{2-i}$. Exprese en su forma cartesiana los complejos z, $\overline{z}$, z^{-1} y deduzca $|z|$.

b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$.

1) (1.0 pto.) Demuestre que $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\mathbb{R}e(z\overline{w})$.
2) (1.0 pto.) Demuestre que $(z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + 2\mathbb{R}e(z\overline{w}) + |w|^2$.
3) (1.0 pto.) Usando que para $u \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}e(u) \leq |u|$, demuestre que $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$.

Solución:

a)
- Observemos que $z = \frac{5+3i}{2-i} = \frac{5+3i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{10+5i+6i-3}{4+1} = \frac{7+11i}{5}$, por lo que la forma cartesiana de z es $\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$. **[1pt.]**
- $\overline{z} = \frac{7}{5} - \frac{11}{5}i$ por definición. **[0.5pts.]**
- Recordemos que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ para todo $z \neq 0$. Tenemos que $|z| = \sqrt{(7/5)^2 + (11/5)^2} = \sqrt{170/25} = \sqrt{34/5}$, por lo que $z^{-1} = \frac{\frac{7}{5} - \frac{11}{5}i}{\left(\sqrt{34/5}\right)^2} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$ **[1pt.]**
- De lo anterior, $|z| = \sqrt{34/5}$. **[0.5pt.]**

b) 1) <u>Opción 1:</u> Observemos que $\overline{(z\overline{w})} = \overline{z}\,\overline{\overline{w}} = \overline{z}w$, lo cual implica que $\mathbb{R}e(z\overline{w}) = \mathbb{R}e(\overline{z}w)$ e $\mathbb{I}m(z\overline{w}) = -\mathbb{I}m(\overline{z}w)$ **[0.5pts.]**. De esta forma, escribiendo la forma cartesiana de $z\overline{w}$ y de $\overline{z}w$, obtenemos que $z\overline{w}+\overline{z}w = \mathbb{R}e(z\overline{w})+i\mathbb{I}m(z\overline{w})+\mathbb{R}e(\overline{z}w)+i\mathbb{I}m(\overline{z}w) = \mathbb{R}e(z\overline{w})+i\mathbb{I}m(z\overline{w})+\mathbb{R}e(z\overline{w})-i\mathbb{I}m(z\overline{w}) = 2\mathbb{R}e(z\overline{w})$ como se deseaba. **[0.5pts.]**

<u>Opción 2:</u> Sea $z = a+ib$ y $w = c+id$. Luego

$$\begin{aligned} z\overline{w} + \overline{z}w &= (a+ib)(c-id) + (a-ib)(c+id) \\ &= 2(ac+bd) \\ &= 2\mathbb{R}e(z\overline{w}), \end{aligned}$$

como se deseaba. **[1 pto.]**

2) Usando las propiedades del conjugado, tenemos que $(z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2$ **[0.5pts.]** y usando (b1), obtenemos que $(z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + 2\mathbb{R}e(z\overline{w}) + |w|^2$. **[0.5pts.]**

3) Dado que $(z+w)$ tiene conjugado $\overline{(z+w)}$, tenemos que $(z+w)\overline{(z+w)} = |z+w|^2$ **[0.2pts.]** y por (b2) tenemos que $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathbb{R}e(z\overline{w}) + |w|^2$ **[0.2pts.]**.
Usando que $\mathbb{R}e(u) \leq |u|$ para $u = z\overline{w}$, obtenemos que $|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2$ **[0.2pts.]** .
Mostraremos que $|z\overline{w}| = |zw|$ **[0.2pts.]** : $|z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w| = |zw|$.
Finalmente, tenemos que $|z+w| \leq |z|^2 + 2\mathbb{R}e(zw) + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$ como se requería.**[0.2pts.]**

P2. En $\mathbb{Z}^3$ se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ como sigue.

$$\forall (a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{Z}^3, (a,b,c) + (a',b',c') = (a+a', b+b', c+c')$$

y

$$\forall (a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{Z}^3, (a,b,c) \cdot (a',b',c') = (aa', ab'+a'b, ac'+a'c).$$

Por ejemplo, $(1,-1,1) + (2,3,0) = (3,2,1)$ y $(1,-1,1) \cdot (2,3,0) = (2, 3-2, 0+2) = (2,1,2)$.

a) (2.0 pts.) Asumiendo que la operación $+$ en $\mathbb{Z}^3$ es asociativa y conmutativa, y que la operación $\cdot$ en $\mathbb{Z}^3$ es asociativa y distribuye con respecto a $+$, demuestre que $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

b) (2.0 pts.) Demuestre que para todo $v = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$,

1) v es invertible para $\cdot \iff a \in \{-1, 1\}$.
2) v es divisor de cero $\iff a = 0$.

c) (2.0 pts.) Demuestre que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $G = \{(a, b, c) \mid a = 1, b, c \in \mathbb{Z}\}$, y que $H = \{(1, 2b, 3c) \mid b, c \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de $(G, \cdot)$.

Solución:

a) Para probar que $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ es un anillo conmmutativo. Debemos probar lo siguiente

1) $(\mathbb{Z}^3, +)$ es un grupo abeliano. Para demostrar esto, debemos chequear las siguientes propiedades:
Opción 1. Podemos notar que $(\mathbb{Z}^3, +)$ es el producto de grupos de $(\mathbb{Z}, +)$, por lo que todas las propiedades se heredan: $+$ es asociativa y conmutativa, $(0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ es el neutro para $+$, y todo elemento $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, posee un inverso, el cual es $(-a, -b, -c) \in \mathbb{Z}^3$. [**Otorgar 1 pto. por justificar utilizando producto de grupos**]
Opción 2.
   - La operación $+$ es asociativa: Esto lo sabemos de enunciado. [**0.1 ptos**]
   - La operación $+$ es conmutativa: Sean (a, b, c), $(a', b', c') \in \mathbb{Z}^3$. Notemos que
   $$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c') = (a' + a, b' + b, c' + c) = (a', b', c') + (a, b, c).$$
   Se concluye que $+$ es conmutativa en $\mathbb{Z}^3$. [**0.2 ptos.**]
   - $(\mathbb{Z}^3, +)$ posee un elemento neutro: Veamos que $(0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ es el neutro para la suma. Como ya sabemos que $+$ es conmutativa, basta con demostrar que $(0, 0, 0)$ es neutro por la derecha (o izquierda). En efecto, sea $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, notemos que
   $$(a + b + c) + (0, 0, 0) = (a + 0, b + 0, c + 0) = (a, b, c).$$
   Se concluye que $(0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ es el neutro para $+$. [**0.3 ptos.**]
   - Sea $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Como $+$ es conmutativa, basta con probar que es inverso por uno de los lados. Debemos probar que existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tal que $(a, b, c) + (x, y, z) = (0, 0, 0)$, es decir, $(a + x, b + y, c + z) = (0, 0, 0)$, de donde obtenemos que $x = -a$, $y = -b$, $z = -c$. Concluimos que todo elemento $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ posee un inverso para $+$. [**0.4 ptos.**]

   De esta manera concluimos que $(\mathbb{Z}^3, +)$ es un grupo abeliano.
2) La operación $\cdot$ es asociativa: Esto lo sabemos de enunciado. [**0.1 ptos.**]
3) La operación $\cdot$ es conmutativa: Sean $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{Z}^3$. Tenemos que
$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', ab' + a'b, ac' + a'c) = (a'a, a'b + ab', a'c + ac') = (a', b', c') \cdot (a, b, c).$$
Se concluye que $\cdot$ es conmutativa. [**0.3 ptos.**]
4) Existe un elemento neutro en $\mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ para $\cdot$.
Opción 1. Probemos que $(1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ es el neutro para $\cdot$. Como $\cdot$ es conmutativa, basta probarlo para un lado. Tenemos que $(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + 1 \cdot b, a \cdot 0 + 1 \cdot c) = (a, b, c)$. [**0.5 ptos.**] Se concluye que $(1, 0, 0)$ es el neutro en $\mathbb{Z}^3$ para $\cdot$.
Opción 2. Sea $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ arbitrario, para que $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ sea neutro para $\cdot$, se debe cumplir que
$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (a, b, c),$$
es decir, $(ax, ay + xb, az + xc) = (a, b, c)$, por lo que $a = ax$, $b = ay + xb$ y $c = az + xc$, de donde se concluye que $x = 1$, $y = 0$ y $z = 0$. Concluimos que $(1, 0, 0)$ es el neutro para $\cdot$. [**0.5 ptos.**]
5) $\cdot$ distribuye con respecto a $+$: Esto lo sabemos por enunciado. [**0.1 ptos.**]

Dada todas la propiedades anteriores, concluimos que $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

b) Sea $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

1) Como $\cdot$ es conmutativa, basta chequear por uno de los dos lados. Para que (a, b, c) sea invertible, debe existir $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tal que

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (1, 0, 0) \Leftrightarrow (ax, ay + xb, az + xc) = (1, 0, 0),$$

es decir, $ax = 1$, $ay + xb = 0$, $az + xc = 0$ [**0.2 ptos.**]. La primera ecuación solo tiene solución en $\mathbb{Z}$ cuando $a \in \{-1, 1\}$ [**0.2 ptos.**], de donde, en cualquiera de los casos $x = a$ (es decir, si $a = 1$, $x = 1$ y si $a = -1$, entonces $x = -1$) [**0.3 ptos.**]. Luego

$$0 = ay + xb = ay + ab = a(y + b)$$
$$0 = az + xc = az + ac = a(z + c)$$

como $a \neq 0$, tenemos que $y + b = 0$ y $z + c = 0$, de donde concluimos que $y = -b$, $z = -c$. Así, todo elemento de la forma $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ es invertible sí y solo sí $a \in \{-1, 1\}$ y su inverso es igual a $(a, -b, -c)$. [**0.3 ptos.**]

2) Como $\cdot$ es conmutativa, basta chequear por uno de los dos lados. Para que (a, b, c) sea divisor de cero, debe existir $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (ax, ay + xb, az + xc) = (0, 0, 0),$$

es decir, $ax = 0$, $ay + xb = 0$, $az + xc = 0$ [**0.3 ptos.**]. De la primera ecuación tenemos que $a = 0$ o $x = 0$.

- Si $a = 0$, entonces $xb = 0$ y $xc = 0$, por lo que $x = 0$ satisface ambas ecuaciones. Así, todo punto de la forma $(0, b, c)$ es divisor de cero. [**0.4 ptos.**]
- Si $a \neq 0$, se debe cumplir que $x = 0$, por lo que $ay = 0$ y $az = 0$. Como $a \neq 0$, entonces $y = 0$ y $z = 0$, de esta manera, si $a \neq 0$, entonces no existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$, por lo que (a, b, c) no es divisor de cero. [**0.4 ptos.**]

c) Para probar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, debemos chequear las siguientes propiedades:

- $\cdot$ es cerrada en G: Sean $(1, b, c)$ y $(1, b', c') \in G$. Notemos que

$$(1, b, c) \cdot (1, b', c') = (1 \cdot 1, 1 \cdot b' + 1 \cdot b, 1 \cdot c' + 1 \cdot c) = (1, b' + b, c' + c) \in G.$$

  Se concluye que la operación $\cdot$ es cerrada en G. [**0.3 ptos.**]
- La operación $\cdot$ es asociativa en G: Se hereda de la asociatividad de $\cdot$ en $\mathbb{Z}^3$. [**0.1 ptos.**]
- La operación $\cdot$ es conmutativa en G: Se hereda de la conmutatividad de $\cdot$ en $\mathbb{Z}^3$. [**0.1 ptos.**]
- El neutro para $\cdot$ en $\mathbb{Z}^3$ era $(1, 0, 0)$, y este pertenece a G, por lo que G posee un neutro para $\cdot$. [**0.2 ptos.**]
- De lo anterior, vimos que un elemento en $\mathbb{Z}^3$ es invertible si y solo si $a \in \{-1, 1\}$, por lo que todo elemento de G es invertible para $\cdot$, y además su inverso es $(1, -b, -c)$, el cual pertenece a G. [**0.3 ptos.**]

Se concluye entonces que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano. Finalmente, para probar que H es un subgrupo de G, utilizaremos la caracterización de subgrupos. Sean $(1, 2b, 3c)$ y $(1, 2b', 3c')$ en G, con $b, b', c, c' \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$(1, 2b, 3c) \cdot ((1, 2b', 3c'))^{-1} = (1, 2b, 3c) \cdot (1, -2b', -3c') = (1, 2b - 2b', 3c - 3c') = (1, 2(b - b'), 3(c - c'))$$

y este último pertenece a H, concluimos así que H es un subgrupo de G [**1 pto.**].

P3. *a*) (3.0 pts.) Asumiendo que los conjuntos B, C y D, dados por

$$B = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \neq b\}, \text{ y } D = \{S \mid S \subseteq \mathbb{N} \wedge |S| \leq 2\},$$

son infinitos, demuestre que son numerables.

b) (3.0 pts.) Sea $(V = \{x, b, c, d\}, +, \cdot)$ una estructura algebraica con dos operaciones. En las tablas que siguen, se definen algunos valores de las operaciones $+$ y $\cdot$. El objetivo de esta pregunta es que complete estas tablas para que $(V, +, \cdot)$ sea un anillo conmutativo. Para ello proceda según las siguientes etapas.

1) Use el neutro de $(V, +)$ y la noción de absorbente para llenar las entradas que lo involucran en la tabla $(V, \cdot)$.

2) Muestre que d es el neutro de $(V, \cdot)$ y llene las celdas asociadas en la tabla de $(V, \cdot)$.

3) Use la distributividad para mostrar que $b \cdot b = (x + d) \cdot b = d$ y que $x \cdot x = x \cdot (b + b) = c$, y termine de completar la tabla de $(V, \cdot)$.

$+$	x	b	c	d
x	c	d	x	b
b	d	x	b	c
c	x	b	c	d
d	b	c	d	x

y

$\cdot$	x	b	c	d
x		x		
b				
c				
d		b		

Solución:

a) Probemos que

- <u>B es numerable</u>: Veamos dos posibles respuestas.
  - *Opción 1:* Consideremos la función $f : B \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(\{a\}) = a$. Esta función es inyectiva, ya que si $a, b \in \mathbb{N}$ son tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$, y luego $\{a\} = \{b\}$.
    Se concluye que $|B| \leq |\mathbb{N}|$. Como B es infinito, además se tiene que $|B| \geq |\mathbb{N}|$, y se concluye que B es numerable. **[0.3pts. por definir la función, 0.5pts. por mostrar que es inyectiva, y 0.2pts. por mencionar que $|B| \geq |\mathbb{N}|$.]**
  - *Opción 2:* Notemos que
    $$B = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{a\}.$$
    Es decir, B es unión numerable de conjuntos finitos, por lo que es a lo más numerable. Se concluye que $|B| \leq |\mathbb{N}|$. **[0.8pts.]**
    Como B es infinito por el enunciado, se tiene que $|B| \geq |\mathbb{N}|$, y se concluye que B es numerable. **[0.2pts.]**
- <u>C es numerable</u>: Veamos dos formas de resolver la pregunta
  - *Opción 1:* Consideremos la función $g : C \longrightarrow \mathbb{N}^2$, dada por
    $$g(\{a, b\}) = \begin{cases} (a, b), & \text{si } a < b, \\ (b, a), & \text{si } b < a. \end{cases}.$$
    Notemos que g es inyectiva. En efecto, sean $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ con $g(\{a, b\}) = g(\{c, d\})$. Luego, se tiene que $\text{mín}\{a, b\} = \text{mín}\{c, d\}$ y $\text{máx}\{a, b\} = \text{máx}\{c, d\}$, lo cual implica que $\{a, b\} = \{c, d\}$.
    Como g es inyectiva, se concluye que $|C| \leq |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$. Como además C es infinito, se tiene que $|C| \geq |\mathbb{N}|$ y C es numerable. **[0.3pts. por definir la función, 0.5pts. por mostrar que es inyectiva, y 0.2pts. por mencionar que $|C| \geq |\mathbb{N}|$.]**
  - *Opción 2:* Notemos que
    $$C \subseteq \bigcup_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} \{a, b\}.$$
    Como el conjunto de la izquierda es unión numerable de conjuntos finitos, se concluye que es a lo más numerable. Luego, $|C| \leq |\mathbb{N}|$. **[0.8pts.]**
    Como C es infinito, se concluye que $|C| \geq |\mathbb{N}|$, y C es numerable. **[0.2pts.]**
- <u>D es numerable:</u> Notemos que $D = \{\emptyset\} \cup B \cup D$. Como D es unión finita de conjuntos a lo más numerable, es a lo más numerable. Es decir, se deduce $|D| \leq |\mathbb{N}|$.**[0.8pts.]**
  Como D es infinito por enunciado se tiene que $|D| = |\mathbb{N}|$. **[0.2pts.]**

b) 1) Como c es el neutro para $+$, es absorbente para $\cdot$, por lo que se concluye que podemos completar la columna y fila de c como sigue:

$\cdot$	x	b	c	d
x		x	c	
b			c	
c	c	c	c	c
d		b	c	

[1pt. por llenar la tabla hasta aquí.]

2) Como $(V, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, sabemos que debe existir un neutro multiplicativo. Tenemos que:

- x no puede ser neutro, ya que si lo fuese, se tendría $x \cdot b = b$, pero $x \cdot b = x \neq b$.
- b no puede ser neutro, ya que se tendría $d \cdot b = d$, pero $d \cdot b = b \neq d$.
- c no puede ser neutro, ya que es el neutro aditivo.

Por descarte, d es neutro y completamos la tabla como sigue:

$\cdot$	x	b	c	d
x		x	c	x
b			c	b
c	c	c	c	c
d	x	b	c	d

[0.5pts. por el razonamiento de descarte, y 0.5pts. por llenar la tabla hasta aquí.]

3) Sabemos que, como el anillo es conmutativo, entonces $b \cdot x = x \cdot b = x$. Además, como $\cdot$ distribuye con respecto a $+$, se tiene, utilizando la tabla para $+$, que

- $b \cdot b = (x + d) \cdot b = x \cdot b + d \cdot b = x + b = d$. **[0.3pts.]**
- $x \cdot x = x \cdot (b + b) = x \cdot b + x \cdot b = x + x = c$.**[0.3pts.]**

Con esta información, podemos completa la tabla, obteniendo:

$\cdot$	x	b	c	d
x	c	x	c	x
b	x	d	c	b
c	c	c	c	c
d	x	b	c	d

[0.4pts. por llenar la tabla.]

Tiempo: 3.0 hrs.