Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2025-2

Pauta de corrección Control 3

P1. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\tan(x))^2}{x} & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calcule el volumen del sólido generado al rotar con respecto al eje OY la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, la recta $x = \pi/4$ y el OX.

Solución

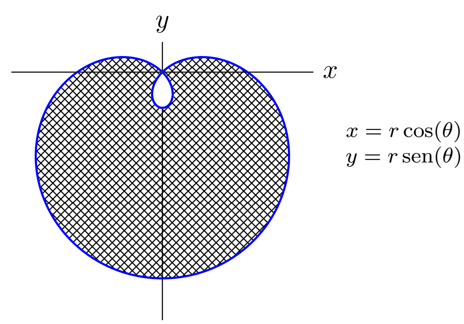
Notando primero que

$$xf(x) = (\tan(x))^2 \quad \text{para todo } x \in [0, \pi/4] \quad \textbf{(0.2 pts)}$$

el volumen pedido está dado por la expresión

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/4} xf(x)dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 dx \quad \textbf{(0.3 pts)} \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} (\sec^2(x) - 1)dx \qquad \left(= 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) dx \right) \quad \textbf{(1 pto)} \\ &= 2\pi(\tan(x) - x)\Big|_0^{\pi/4} \quad \textbf{(0.5 pts)} \\ &= 2\pi\Big(\tan(\pi/4) - \pi/4 - (\tan(0) - 0) \Big) = 2\pi - \pi^2/2. \quad \textbf{(1 pto)} \end{aligned}$$

b) **(3 pts.)** Considere la “cardioide” de ecuación en coordenadas polares $r(\theta) = \sqrt{2} - 2\,\text{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$. Determine los rangos del ángulo θ para los cuales $r(\theta) > 0$ y donde $r(\theta) < 0$ (Gráficamente estos rangos generan un lazo externo y otro interno de la cardioide, ver figura). Encuentre el área de la región que está afuera del lazo interno y al mismo tiempo adentro del lazo externo.



Solución

Claramente:

$$\begin{aligned} r > 0 \quad &\iff \quad \sqrt{2} - 2\,\text{sen}(\theta) > 0 \\ &\iff \quad \text{sen}(\theta) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \textbf{(0.2 pts)} \end{aligned}$$

Considerando el gráfico conocido de la función sen (o su interpretación gráfica en el círculo trigonométrico), esto ocurre cuando

$$\iff \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}) \cup (\tfrac{3\pi}{4}, 2\pi].$$

Análogamente, se tiene que

$$r < 0 \quad \iff \theta \in (\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}). \quad \textbf{(0.3 pts)}$$

Área del lazo interno:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^2 d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\left(2 - 4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta) + 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right) d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(2 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta) - \cos(2\theta)\right) d\theta \\ &= \left(2\theta + 2\sqrt{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\right)_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= (\pi - 4 + 1)) = \pi - 3 \quad \textbf{(1 pto)} \end{aligned}$$

Área del lazo externo:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^2 d\theta + \int_{3\pi/4}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^2 d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^2 d\theta - A_1 \\ &= \left(2\theta + 2\sqrt{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\right)_{0}^{2\pi} - A_1 \\ &= (4\pi + 0 - 0) - A_1 = 4\pi - A_1 = 3\pi + 3 \quad \textbf{(1 pto)} \end{aligned}$$

El área encerrada entre ambos lazos es

$$A = A_2 - A_1 = (3\pi + 3) - (\pi - 3) = 2\pi + 6. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

P2. a) **(3,0 pts.)** Encuentre el área del manto del sólido de revolución generado al rotar **la parte del primer cuadrante** de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (o sea $x, y \geq 0$), en torno al OX.

Solución

La función en el primer cuadrante es

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \qquad x \in [0, 2]. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

El área pedida se calcula con la siguiente integral:

$$S = \int_0^2 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Derivando f, se tiene que

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-2x}{4\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{2\sqrt{4 - x^2}}. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

de donde

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} \quad = \quad \sqrt{1 + \frac{x^2}{4\,(4 - x^2)}} = \sqrt{\frac{16 - 3x^2}{4\,(4 - x^2)}} = \frac{\sqrt{16 - 3x^2}}{2\sqrt{4 - x^2}}. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

Con esto, la superficie pedida se calcula del modo siguiente:

$$S \quad = \quad \int_0^2 2\pi \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \frac{\sqrt{16 - 3x^2}}{2\sqrt{4 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \sqrt{16 - 3x^2}dx. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

Para calcular la integral hacemos el cambio trigonométrico:
$$\begin{array}{c} \sqrt{3}x = 4\operatorname{sen} t \\ x=0 \iff t=0 \\ x=2 \iff t=\pi/3 \\ \sqrt{16-3x^2} = 4|\cos(t)| = 4\cos(t) \\ dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos(t)dt \end{array}$$
. Así tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/3} 4\cos(t)\frac{4}{\sqrt{3}}\cos(t)dt = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3}\cos^2(t)dt \quad \textbf{(0.5 pts)} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3}\{1+\cos(2t)\}\,dt = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left\{t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right\}_0^{\pi/3} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right\} = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}}+\pi \quad \textbf{(0.5 pts)} \end{aligned}$$

b) I) **(1,0 pto.)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(5+\ln(x))^{10}}{1+x^2}dx$

Solución

Sea $f(x) = x^{-3/2}$ y veamos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(5+\ln(x))^{10}}{1+x^2}}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}(5+\ln(x))^{10}}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{5}{x^{1/20}}+\frac{\ln(x)}{x^{1/20}}\right)^{10}}{\frac{1}{x^2}+1} = 0,$$

donde hemos usado el límite conocido $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ para cualquier $\alpha > 0$. Por lo tanto, existe algún $b > 1$ tal que
$$\frac{(5+\ln(x))^{10}}{1+x^2} \le \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{para todo } x \ge b. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

(Acá se puede utilizar cualquier función $f(x) = 1/x^\alpha$ con $1 < \alpha < 2$ para comparar.)

Como la función $g(x) = \frac{(5+\ln(x))^{10}}{1+x^2}$ es no negativa y la integral $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}$ es convergente (pues es de la forma $\int_1^{+\infty} x^{-p}$ con $p > 1$), entonces por el criterio de comparación concluimos que la integral pedida es convergente. **(0.5 pts)**

II) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}dx.$

Solución

Para analizar la convergencia de esta integral, tomamos cualquier $c > 0$ y separamos

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}dx = \int_0^{c}\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}dx + \int_c^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}dx. \quad \textbf{(0.2 pts)}$$

Para la primera integral, tomamos la función $g(x) = 1/\sqrt{x}$ y notamos que

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left|\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}\right|}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x}\right| = 1,$$

donde usamos el límite conocido $\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ y la continuidad de la función e^{-x^2} en $x = 0$. Luego, como $\int_0^c\frac{1}{x^{1/2}}$ es convergente, entonces deducimos que $\int_0^c\frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}$ es absolutamente convergente y por lo tanto también convergente. **(0.8 pts)**

Para la segunda integral, notemos que para todo $x \geq c$ se tiene

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{e^{-x^2}}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

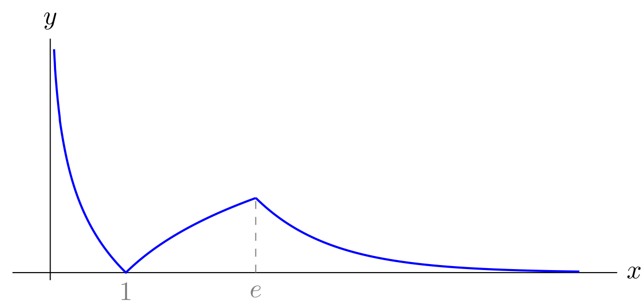
Como $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$ es convergente, por el criterio de comparación deducimos que $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)e^{-x^2}}{x^{3/2}}dx$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente. **(0.8 pts)**

Luego, la integral pedida es convergente ya que es suma de dos integrales impropias convergentes. **(0.2 pts)**

P3. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-e}|\ln(x)| & \text{si } x \in (0, e] \\ e^{-x} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$$

y la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



a) **(2.5 pts.)** Calcule, si existe, el área de $\mathcal{R}$.

Solución

Para calcular el área se debe estudiar la integral

$$\begin{aligned} A &= -\int_{0^+}^{1} e^{-e}\ln(x)dx + \int_1^e e^{-e}\ln(x)dx + \int_e^{\infty} e^{-x}dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 e^{-e}\ln(x)dx + \int_1^e e^{-e}\ln(x)dx + \lim_{x\to\infty}\int_e^x e^{-t}dt. \quad \textbf{(0.5 pts)} \end{aligned}$$

Usando las primitivas conocidas de $\ln(x)$ y e^{-x} queda

$$\begin{aligned} A &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{-e}\left(x\ln(x) - x\right)\Big|_\varepsilon^1 + e^{-e}\left(x\ln(x) - x\right)\Big|_1^e + \lim_{x\to\infty} e^{-t}\Big|_x^e \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{-e}\left(1 + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon\right) + e^{-e} + \lim_{x\to\infty}\left(e^{-e} - e^{-x}\right). \quad \textbf{(0.5 pts)} \end{aligned}$$

Usando que $\varepsilon\ln\varepsilon \to 0$ y $e^{-x} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $x \to \infty$ respectivamente, se concluye que ambos límites existen **(1 pto)**
y además

$$A = 3e^{-e}. \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

b) **(3.5 pts.)** Calcule, si existe, el volumen del sólido generado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.

Solución

Para calcular el área se debe estudiar la integral

$$\begin{aligned} V_{OY} &= -2\pi\int_{0^+}^1 e^{-e}x\ln(x)dx + 2\pi\int_1^e e^{-e}x\ln(x)dx + 2\pi\int_e^\infty xe^{-x}dx \\ &= -2\pi e^{-e}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x\ln(x)dx + 2\pi e^{-e}\int_1^e x\ln(x)dx + 2\pi\lim_{x\to\infty}\int_e^x te^{-t}dt. \quad \textbf{(0.5 pts)} \end{aligned}$$

La primitiva de $x\ln(x)$ se calcula por partes:

$$\int x\ln(x)dx \qquad \left| \begin{array}{ll} F=\ln(x), & F'=x^{-1} \\ G'=x & G=x^2/2 \end{array} \right.$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x)-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

La primitiva de xe^{-x} también se calcula por partes:

$$\int xe^{-x}dx \qquad \left| \begin{array}{ll} F=x, & F'=1 \\ G'=e^{-x} & G=-e^{-x} \end{array} \right.$$
$$= -xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)+C \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

Usando estas primitivas queda

$$\begin{aligned} V_{OY} &= -2\pi e^{-e}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right)_{\varepsilon}^{1} \\ &\quad +2\pi e^{-e}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right)_{1}^{e}+2\pi\lim_{x\to\infty}\left(e^{-t}(t+1)\right)\Big|_{x}^{e} \\ &= -2\pi e^{-e}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^2}{4}\right) \\ &\quad +2\pi e^{-e}\left(\frac{e^2+1}{4}\right)+2\pi\lim_{x\to\infty}\left(e^{-e}(e+1)-e^{-x}(x+1)\right). \quad \textbf{(0.5 pts)} \end{aligned}$$

Usando que $\varepsilon^2\ln\varepsilon\to 0$ y $(x+1)e^{-x}\to 0$ cuando $\varepsilon\to 0$ y $x\to\infty$ respectivamente, se concluye que ambos límites existen **(1 pto)**
y además
$$V_{OY}=\pi e^{-e}\left(\frac{e^2+4e+6}{2}\right). \quad \textbf{(0.5 pts)}$$