Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Avanzado y Aplicaciones, MA2002 - Primavera 2025
Jueves 20 de Noviembre

CONTROL 3

Problema 1.

a) (3 puntos) Calcule la integral

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}\, dx,$$

donde α es un número real positivo.

b) (3 puntos) Calcule la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5-4\sin t} dt.$$

Problema 2.

a) (3 puntos) Dado $L > 0$, obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = t^2 - t$ en el intervalo $[-L, L]$ derivando su extensión periódica con periodo $2L$.

b) (3 puntos) Una función f satisface las dos condiciones

$$f(-x) = f(x) \quad \text{y} \quad f(x+\pi) = -f(x) \quad \text{para todo } x.$$

Demostrar que sus coeficientes de Fourier cumplen

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \cdots = 0.$$

Problema 3.

a) (3 puntos) Sea g una función tal que $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$. Demuestre que

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} dy$$

Indicación: $\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-s^2/4}$.

b) (3 puntos) Calcule la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^3 - x^2 + 4x - 4}.$$

TIEMPO: 3 hrs.
No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

FORMULARIO

Serie de Fourier

La serie de Fourier de una función continua $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ en el intervalo $[-l, l]$ se define por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

donde los coeficientes de Fourier pueden obtenerse a partir de las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x]\right)$$

$$\cos(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\sin[(\alpha+\beta)x] + \sin[(\beta-\alpha)x]\right)$$

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrable se define por:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy.$$

La transformada inversa (o anti-transformada) de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrable se define por:

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ixs} ds.$$

Convolución

La convolución de dos funciones f, g se define por:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x).$$

Tabla de transformadas de Fourier

Función	**Transformada de Fourier**
$f'(x)$	$is\hat{f}(s)$
$f^{(k)}(x)$	$(is)^k \hat{f}(s)$
$f(x-a)$	$e^{-ias}\hat{f}(s)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(s-a)$
$f(ax); a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$e^{-ax^2}; a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-s^2/4a}$
$\frac{a}{a^2+x^2}; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert s\rvert}$
$\frac{a^3-ax^2}{(a^2+x^2)^2}; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}a\lvert s\rvert e^{-a\lvert s\rvert}$
$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert \leq a \\ 0 & \text{si no} \end{cases}; a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(as)}{s}$

Nota: Puede usar sin justificar cualquier teorema o resultado visto en clases o en el Apunte del Curso, aunque no esté en el formulario. Sin embargo, si utiliza un resultado no visto en clases o que no está en el Apunte del Curso, debe demostrarlo.