Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Primavera 2025 - Control 3
Noviembre 26, 2025

P1. **(a)** (3 ptos.) ¿Cuales de las siguientes matrices son diagonalizables y porqué?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz no invertible tal que $\lambda_1 = 1$ es valor propio de A y existen al menos dos vectores propios linealmente independientes v_1 y v_2 asociados a este valor propio, esto es, $Av_1 = v_1$ y $Av_2 = v_2$.

I) (1 pto.) Pruebe que $\lambda_2 = 0$ es otro valor propio de A.

II) (1 pto.) Calcule las dimensiones de los espacios propios asociados a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, esto es,

$$m_1 = dim(Ker(A - \mathbb{I})),\ m_2 = dim(Ker(A - 0\mathbb{I})).$$

III) (1 pto.) Pruebe que A es diagonalizable.

P2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz simétrica.

(a) (2.0 ptos) Determine todos los valores propios de A.

(b) (2.0 ptos) Para cada valor propio λ de A determine el subespacio vectorial de vectores propios asociados a λ, es decir, calcule $W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$.

(c) (2.0 ptos) Encuentre matrices $P, D \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tales que D es diagonal, $PP^T = I$ y $A = PDP^T$.

P3. **(a)** (2 ptos.) Sean $v_1 = (1,1,0,0)^T, v_2 = (1,-1,0,0)^T, v_3 = (0,1,1,0)^T, v_4 = (1,0,1,0)^T$ y $v_5 = (1,1,1,1)^T$ y $U = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\rangle$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Usando el método de Gram-Schmidt, ortonormalice el generador de U.

(b) (2 ptos.) Considere una matriz simétrica $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ con coordenadas enteras estríctamente positivas. Probar que tiene dos valores propios reales y distintos.

(c) (2 ptos.) Sea $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ una matriz no invertible. Pruebe que si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de M asociado a un valor propio no nulo, entonces M consiste en dos filas idénticas y que la suma de los valores en cada fila de M es constante e igual a dicho valor propio.

Tiempo del control 3 horas.