FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

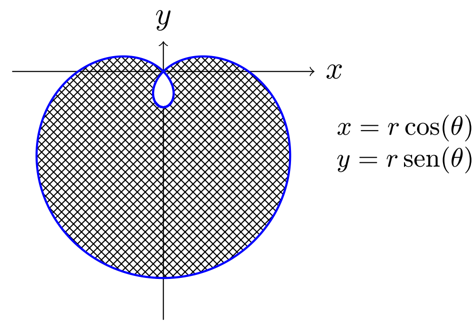
Control 3, MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2025/2 (19 de Noviembre de 2025)

P.1. (a) **(3 pts.)** Sea $f\colon [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\tan(x))^2}{x} & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calcule el volumen del sólido generado al rotar con respecto al eje OY la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, la recta $x = \pi/4$ y el OX.

(b) **(3 pts.)** Considere la "cardioide" de ecuación en coordenadas polares $r(\theta) = \sqrt{2} - 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$. Determine los rangos del ángulo θ para los cuales $r(\theta) > 0$ y donde $r(\theta) < 0$ (Gráficamente estos rangos generan un lazo externo y otro interno de la cardioide, ver figura). Encuentre el área de la región que está afuera del lazo interno y al mismo tiempo adentro del lazo externo.



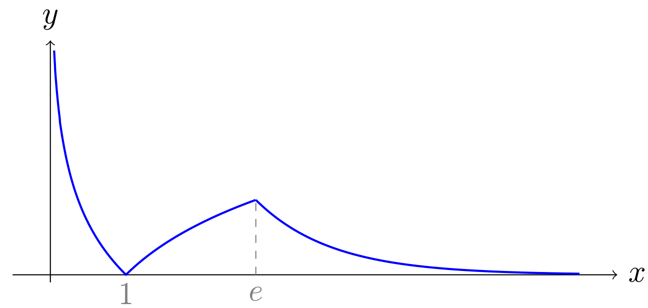
P.2. (a) **(3 pts.)** Encuentre el área del manto del sólido de revolución generado al rotar **la parte del primer cuadrante** de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (o sea $x, y \geq 0$), en torno al OX.

(b) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias.

i) (1 pts.) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(5 + \ln(x))^{10}}{1 + x^2} dx$

ii) (2 pts.) $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(x) e^{-x^2}}{x^{3/2}} dx.$

P.3. Considere la función definida por



$$f(x) = \begin{cases} e^{-e}|\ln(x)| & \text{si } x \in (0, e] \\ e^{-x} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$$

y la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

(a) **(2.5 pts.)** Calcule, si existe, el área de $\mathcal{R}$.

(b) **(3.5 pts.)** Calcule, si existe, el volumen del sólido generado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.

Tiempo: 3 horas

Formulario	***Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal*** *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable)*	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert \, dx$
	Volumen de un sólido de área transversal A *($A : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable)*	$\int_a^b A(x) \, dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)*	$\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)*	$2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$
	Longitud del arco de curva definido por f *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)*	$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)*	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ *($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b - a \leq 2\pi$)*	$\frac{1}{2} \int_a^b (f(\phi))^2 \, d\phi$