Pauta Tarea 3

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 23 Junio 2021
Fecha de entrega: 10 Julio 2021 a las 23h59 hrs

Profesor de cátedra: Pablo Ugalde Salas
Profesora auxiliar: Cynthia Vega

P1

Determine si las siguientes series convergen o divergen, explicitando el criterio utilizado [**1 pto c/u**]:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\ln(k)}{k^3}$ **R:** Converge por mayoración

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\ln(k)}{k^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \tag{1}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}$ **R:** Converge por criterio de raíz k-ésima.

$$\sqrt[k]{\frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}} = e^{-\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1 \tag{2}$$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ con $b_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{k par} \\ \frac{1}{2^k} & \text{k impar} \end{cases}$ **R:** Diverge por minoración.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k \text{ par},\ k\leq n} \frac{1}{k} + \sum_{k \text{ impar},\ k\leq n} \frac{1}{2^k} > \sum_{k \text{ par},\ k\leq n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \tag{3}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^k)}{k^2}$ **R:** Converge absolutamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(k^k)}{k^2}\right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \tag{4}$$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ **R:** Converge por criterio de raíz n-ésima.

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} = \left(\frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right)^{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1} < 0 \tag{5}$$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ con $0 < \alpha < 1$. **R:** Diverge por criterio del cuociente.

$$\frac{\dfrac{\sqrt{k!}}{\prod_{j=1}^{k+1}(1+\alpha\sqrt{j})}}{\dfrac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}} = \frac{\sqrt{k}}{1+\alpha\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}+\alpha\sqrt{1+\frac{1}{k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\alpha} > 1 \tag{6}$$

P2

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge. **[2 pts]**.

   R: Como la serie converge $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, luego existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0$. $0 \leq a_k \leq 1$, luego $a_k^2 < a_k$ [1 pto] y por mayoración la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge [1 pto].

2. Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ converge, pero que $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ diverge. **[2 pts]**.

   R:

$$\int_1^N \frac{\sin(x)}{x}dx = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_1^N + \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}dx = -\frac{\cos(N)}{N} + \cos(1) + \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}dx \tag{7}$$

   [0.3 pts] $\int_1^N \frac{\cos x}{x^2}dx$ converge absolutamente, luego converge [0.5 pto],y $\lim_{N\to\infty} \frac{\cos(N)}{N} = 0$, luego La serie converge [0.2 pts]. Para ver que no converge absolutamente

$$\int_1^{2N\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \int_1^{2\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \tag{8}$$

   [0.5 pto] Veamos cuanto vale la integral:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx > \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin(x)|dx \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx \tag{10}$$

   Luego podemos minorar (8) por una serie armónica y por tanto la integral diverge. [0.5 pto]

3. Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}$ converge. **[2 pts]**. **R:** Notar que f es positiva y decreciente si $y > 1$:

$$f'(y) = \frac{\exp(y)\exp(y\ln(y)) - \exp(y\ln(y))(\ln(y)+1)}{\exp(y\ln(y))^2} \tag{11}$$

$$= -\frac{\exp(y)\exp(y\ln(y))\ln(y)}{\exp(y\ln(y))^2} < 0 \tag{12}$$

[0.6 pto] Luego la integral converge si y solo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^k}$ converge [0.8 pto].

Y usando el criterio de raíz $k-$ésima vemos que la serie converge.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{e^k}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e}{k} = 0 \tag{13}$$

[0.6 pto]