Tarea 2

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 25 Mayo 2021
Fecha de entrega: 11 Junio 2021 a las 22 hrs

Profesor de cátedra: Pablo Ugalde Salas
Profesora auxiliar: Cynthia Vega

P1

Demuestre o refute con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

1. Sean $P = \left\{ \frac{i}{n} \right\}_{i=0}^{n}$ y $Q = \left\{ \frac{i}{3n} \right\}_{i=0}^{3n}$, y f una función acotada en $[0,1]$, entonces $s(f,Q) \geq s(f,P)$.

   Verdadero claramente $P \subset Q$, luego $s(f,Q) \geq s(f,P)$.

2. Sea f una función integrable en un intervalo I, entonces f es continua.

   Falso por ejemplo la función $f = \begin{cases} x & \text{si } x < 2. \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es integrable en cualquier intervalo acotado y discontinua en $x = 2$.

3. Sea $P(x)$ un polinomio tal que sus raices reales corresponden al conjunto $C = \{r_1, \ldots, r_m\}$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ tal que $C \cap [a,b] = \emptyset$, entonces $\frac{1}{P(x)}$ es integrable en $[a,b]$.

   Verdadero: La función $\frac{1}{P(x)}$ es continua en $[a,b]$ y por lo tanto integrable.

4. Sea f una función definida en $[0,1]$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Entonces f es integrable en $[0,1]$.

   Verdadero: La función f es monotona en $[0,1]$ y por lo tanto integrable.

5. Sea f integrable en un intervalo I, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in I$. Entonces $\ln(f)$ es integrable en I.

   NOTA AL AYUDANTE: Esta pregunta es falsa, por ejemplo basta con tomar $f = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y se ve que entonces el ínfimo de f en $[0,1]$ es cero, y por lo tanto $ln(f)$ es una función no acotada. Pero, por un error mío yo creí que había escrito si $f > a > 0$ y en ese caso la pregunta es verdadera. Si un alumno demuestra eso también está correcto. La demostración es la siguiente: Sea $\epsilon > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i(\ln(f)) - m_i(\ln(f)))\Delta x_i \tag{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\ln(M_i(f)) - \ln(m_i(f)))\Delta x_i \tag{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{M_i(f)}{m_i(f)}\right)\Delta x_i \tag{3}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i(f)}{m_i(f)} - 1\right)\Delta x_i \tag{4}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i(f) - m_i(f)}{\inf(f)}\right)\Delta x_i \tag{5}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M_i(f) - m_i(f)}{a}\right)\Delta x_i \tag{6}$$

Luego si se toma una partición P tal que $S(f,P)-s(f,P) \leq a\epsilon$. Se tiene que $S(\ln(f),P)-s(\ln(f),P) \leq \epsilon$.

6. Sea f una función definida en un intervalo I tal que $|f|$ es integrable en I, entonces f es integrable.

   Falso: Considere $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$. $|f| = 1$, pero f no es integrable.

P2

Usando sumas de Riemann y el teorema fundamental del cálculo calcule los siguientes límites. Indique explicitamente el intervalo, la partición utilizada y la función.

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\frac{i}{4n^2}$

   R: la función es $f(x) = \sin(\pi x)x$ El intervalo es $[0, \frac{1}{2}]$ y la partición es $\{i/2n\}_{i=0}^{n}$. La integral a resolver entonces queda

$$\int_0^{1/2} \sin(t)tdt = \sin(1/2) - 1/2\cos(1/2) \tag{7}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\sqrt[n]{2^i}}\sqrt[n]{2^{i-1}}(\sqrt[n]{2} - 1)$

   R: La función es $f(x) = \exp(x)$ el intervalo es $[1,2]$ la partición viene dada por $\{\sqrt[n]{2^i}\}_{i=0}^{n}$. Por lo tanto la integral a calcular es $\int_1^2 e^x = e^2 - e^1$

NOTA: Dar 1 puntos por identificar la función, 1 punto por la partición y el intervalo, y 1 punto por calcular el límite.

P3

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$ y calcule el valor de $\int\limits_0^1 f$.

R:

Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar una partición tal que $S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$. Notar primero que $s(f, P) = 0$ pues para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $\min_{x \in I}(f(x)) = 0$ [1 pto].

Considere el conjunto $A_n = \left\{ \frac{i}{j};\ 0 \leq i \leq j, j \in \{1, \ldots, n\} \right\}$ Es decir el conjunto de todas las fracciones con denominador menor o igual a n (con el 0 y el 1 incluidos). Considere ahora la partición $P = \{a + \eta/2 \ \ a \in A_n \setminus \{1\}\} \cup \{a - \eta/2 \ \ a \in A_n \setminus \{0\}\}$ (Es decir creamos intervalos de largo η alrededor de los puntos de A_n.) Sea m el número de elementos de A_n. [1 pto]

Dividamos los intervalos de la partición P en I_1 e I_2 tal que en I_1 se encuentran los intervalos que contienen a los puntos de A_n e I_2 el resto de los intervalos. [1 pto]

$$S(f, P) = \sum_{I \in I_1} \max_{x \in I} f(x) \Delta I + \sum_{I \in I_2} \max_{x \in I} f(x) \Delta I \tag{8}$$

donde ΔI denota el largo del intervalo.

$$\begin{aligned} &\sum_{I \in I_1} \max_{x \in I} f(x) \Delta I && (9) \\ &\leq \sum_{I \in I_1} 1 \Delta I && (10) \\ &= (m - 1)\eta && (11) \end{aligned}$$

[1 pto] Notar que por construcción en cualquier intervalo de I_2 el máximo valor de la función f esta acotado por $1/n$. Así

$$\begin{aligned} &\sum_{I \in I_2} \max_{x \in I} f(x) \Delta I && (12) \\ &\leq \sum_{I \in I_1} \frac{1}{n} \Delta I && (13) \\ &= \frac{1}{n}(1 - (m - 1)\eta) && (14) \\ &\leq \frac{1}{n} && (15) \end{aligned}$$

[1pto]

Luego $S(f, P) \leq \frac{1}{n} + (m - 1)\eta$. Si tomamos n tal que $\frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\eta \leq \frac{\epsilon}{2(m-1)}$ se tiene el resultado. [1pto]