Pauta Tarea 1

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 07 Abril 2021
Fecha de entrega: 26 Abril 2021

Profesor de cátedra: Pablo Ugalde Salas
Profesora auxiliar: Cynthia Vega

P1

Demuestre o refute con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

1 Punto por cada item.

1. Sea $f : I \subset R \to R$, tal que existe un $L > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se cumple $|f(x)-f(y)| < L|x-y|$. Entonces f es continua.

   Verdadero. Dado $\epsilon > 0$ basta escoger $\delta = \epsilon/L$ y se tiene el resultado.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f([a, b]) = [c, d]$. Entonces f es continua.

   Falso considere $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x - [x]$, es discontinua en $x = 1$, y tiene recorrido $[0, 1]$.

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con inversa tal que su inversa es continua. Entonces f es continua.

   Verdadero basta considerar el teorema de la función inversa a la función f^{-1}.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado n. Entonces f cambia $n - 1$ veces de monotonía (pasa de ser decreciente a creciente o viceversa).

   Falso Considere $f(x) = x^3$ es siempre creciente.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es diferenciable en (a, b).

   Falso: Cualquier función continua con un punto donde no sea diferenciable sirve. Por ejemplo $|x|$ definida en el intervalo $[-1, 1]$.

6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa y derivable en (a,b), entonces $f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}), \forall x, \bar{x} \in (a, b)$.

   Verdadero: En efecto si f es convexa y derivable podemos tomar

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\bar{x}) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(\bar{x} + \lambda(x-\bar{x})) - f(\bar{x})}{\lambda(x-\bar{x})}(x-\bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \tag{2}$$

$$\Rightarrow f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \tag{3}$$

   Dónde el último paso se obtiene tomando límite cuando $\lambda \to 0$. Alternativamente se puede hacer con la definición de convexidad del apunte de la monotonía de la pendiente de las rectas secantes.

P2

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa, demuestre que f es continua en (a, b).

Hay varias formas de verlo, si es necesario consultarme sobre la demostración del estudiante.

Yo lo hice así:

Sea $\bar{x} \in (a, b)$ entonces existe $r > 0$ tal que $x \in [\bar{x} - r, \bar{x} + r] \subset (a, b)$.

Luego sea $d = \begin{cases} r \text{ si } x - \bar{x} > 0 \\ -r \text{ si } x - \bar{x} \leq 0 \end{cases}$

Y así podemos escribir $x = \bar{x} + \alpha d$ para algún $\alpha \in [0, 1]$. Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x} + \alpha d) && (4) \\ &= f(\alpha(d + \bar{x}) + (1 - \alpha)\bar{x}) && (5) \\ &\leq \alpha f(d + \bar{x}) + (1 - \alpha)\bar{x} && (6) \\ &\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \leq \alpha(f(d + \bar{x}) - f(\bar{x})) && (7) \end{aligned}$$

[2 puntos]

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x} + r - r) && (8) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(\bar{x} - r) + \frac{1}{2}(\bar{x} + r)\right) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x} - r) + \frac{1}{2}f(\bar{x} + r) && (9) \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\left(f(\bar{x} - r) - f(\bar{x})\right) + \frac{1}{2}\left(f(\bar{x} + r) - f(\bar{x})\right) && (10) \end{aligned}$$

De donde se desprende que bien $f(\bar{x} - r) - f(\bar{x})$ o $f(\bar{x} + r) - f(\bar{x})$ es positivo. Por lo tanto

$$K = \max\{f(\bar{x} + r) - f(\bar{x}), f(\bar{x} - r) - f(\bar{x})\} > 0 \tag{11}$$

[1 pto]

y volviendo a (7) se tiene:

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \alpha K \tag{12}$$

[1 pto]

Notar que

$$|x - \bar{x}| = |\alpha d| = \alpha r \tag{13}$$

Así, dado $\epsilon > 0$, si tomamos $\delta = \min\{r, r\frac{\epsilon}{K}\}$ se tiene que si $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \alpha < \frac{\delta}{r} \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \leq \epsilon$.

[1 pto]

Finalmente falta ver que $f(\bar{x}) - f(x) < \epsilon$.

Sea $y = 2\bar{x} - x$, luego $|y - \bar{x}| = |\bar{x} - x| \leq \delta \Rightarrow f(y) - f(\bar{x}) \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\right) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(x) && (14) \\ &\Rightarrow f(\bar{x}) - f(x) \leq f(y) - f(\bar{x}) \leq \epsilon \quad \square && (15) \end{aligned}$$

[1 pto]

En términos de puntaje, asignar un 4 si logra utilizar alguna definición de continuidad y aplicar la propiedad de convexidad, aún cuando no termine de hacer el resultado.

P3

Construya una función $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ con las siguientes características (justifique por qué se cumplen):

- Continua en $[0, 5]$ [1 punto]
- Derivable en $(0, 5)$ [1 punto]

- Estrictamente convexa en $(0,3)$ y estrictamente cóncava en $(3,5)$. [2 puntos]

- Estrictamente decreciente en $(0,2)$ y estrictamente creciente en $(2,5)$. [2 puntos]

por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 50x$, luego $f'(x) = (x-2)(x-5)^2$ es negativa en $(0,2)$ y positiva en $(2,5)$, y $f''(x) = 3(x-5)(x-3)$ que es positiva en $(0,3)$ y negativa en $(3,5)$.

Si no se cumple alguno de los puntos descontarlo entero.