

P1

a) Usar las fracciones parciales

$$F(s) = \frac{2}{s^2 \left((s-1)^2 + 1 \right)}$$

$$\frac{2}{s^2 \left((s-1)^2 + 1 \right)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2 + 1}$$

$$2 = (As+B) \left((s-1)^2 + 1 \right) + (Cs+D) s^2$$

Evaluable en $s \neq 0$ obtenemos

$$2B = 2 \Rightarrow B = 1 \quad 0.3$$

$$s = 1$$

$$(A+1) \cdot 1 + C+D = 2$$

$$A+C+D = 1$$

Coef de s^3

$$A+C=0$$

$$\Rightarrow \boxed{D=1} \quad 0.3$$

Coef de s

$$2A - 2B = 0$$

$$2A = 2B$$

$$A = 1 \quad 0.3$$

$$C = -1 \quad 0.3$$

$$\frac{2}{s^2((s-1)^2+1)} = \frac{s+1}{s^2} + \frac{(-s+1)}{((s-1)^2+1)}$$

0.3pt

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s}{((s-1)^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\frac{2}{s^2((s-1)^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

0.5pt

0.25pt 0.25pt 0.5pt

Ans $f(t) = 1 + t - e^t \cos t$

Usando Convolution

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{((s-1)^2+1)}\right) = t * 2 \sin t e^t$$

0.5pt

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{((s-1)^2+1)}\right) = \int_0^t (t-u) 2 \sin u e^u du$$

0.5pt

$$= \int_0^t t \cdot 2 \operatorname{sen} u e^u du - \int_0^t u 2 \operatorname{sen} u e^u du$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sen} u e^u du &= \operatorname{sen} u e^u \Big|_0^t - \int_0^t \cos u e^u du \\ &= \operatorname{sen} t e^t - \left(\cos u e^u \Big|_0^t - \int_0^t (-\operatorname{sen} u e^u) du \right) \\ &= \operatorname{sen} t e^t - \cos t e^t + 1 - \int_0^t \operatorname{sen} u e^u du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \operatorname{sen} u e^u du = \frac{\operatorname{sen} t e^t - \cos t e^t + 1}{2} \quad \boxed{0.5 \text{pt}}$$

Em particular $\frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{sen} t e^t - \cos t e^t}{2} \right) = \operatorname{sen} t e^t$

$$\begin{aligned} \int_0^t u \operatorname{sen} u e^u du &= \frac{\operatorname{sen} u e^u - \cos u e^u \cdot u}{2} \Big|_0^t \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{\operatorname{sen} u e^u - \cos u e^u}{2} \right) du \end{aligned}$$

$$\int_0^t \cos u e^u du = \cos u e^u \Big|_0^t - \int_0^t -\sin u e^u du$$

$$= (\cos t e^t - 1) + \int_0^t \sin u e^u du$$

$$= \cos t e^t - 1 + \frac{\sin t e^t}{2} - \frac{\cos t e^t}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sin t e^t}{2} + \frac{\cos t e^t}{2} - \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\int_0^t u \sin u e^u du = \frac{\sin t e^t - \cos t e^t \cdot t}{2}$$

$$- \left(\frac{\sin t e^t - \cos t e^t + 1}{4} \right)$$

$$+ \frac{\sin t e^t}{4} + \frac{\cos t e^t}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\sin t e^t - \cos t e^t \cdot t}{2}$$

$$+ \frac{\cos t e^t}{2} - \frac{1}{2}$$

0.5 pt

Am

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{(s-1)^2+1}\right) &= 2t \left(\frac{\sin t e^t - \cos t e^t + 1}{2} \right) \\
 &\quad - 2 \left(\frac{(\sin t e^t - \cos t e^t) t}{2} \right) \\
 &\quad - 2 \frac{\cos t e^t}{2} + \frac{2}{2}
 \end{aligned}$$

1.0 pt

$$= t - \frac{2 \cos t e^t}{2} + \frac{2}{2} = t + 1 - \cos t e^t$$

P1 b) $x'' + x = c_1 \delta_{\frac{\pi}{2}} + c_2 \delta_{\pi}$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}(x) - s + \mathcal{L}(x) = c_1 e^{-\frac{s\pi}{2}} + c_2 e^{-s\pi}$$

$$(s^2 + 1) \mathcal{L}(x) = -s + c_1 e^{-\frac{s\pi}{2}} + c_2 e^{-s\pi}$$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{c_1}{s^2 + 1} e^{-\frac{s\pi}{2}} + \frac{c_2}{s^2 + 1} e^{-s\pi} \quad 0.4 \text{ pt}$$

Usando la fórmula de traslación

$$\mathcal{L} \left(\sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) H \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{e^{-\frac{s\pi}{2}}}{s^2 + 1} \quad 0.3 \text{ pt}$$

$$\mathcal{L} \left(\sin (t - \pi) H(t - \pi) \right) = \frac{e^{-s\pi}}{s^2 + 1} \quad 0.3 \text{ pt}$$

$$x = \cos t + c_1 \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) H \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + c_2 \sin (t - \pi) H(t - \pi)$$

Como $\sin(t - \pi/2) = -\cos t$

$$x(t) = \cos t \rightarrow C_1 \cos t H(t - \frac{\pi}{2}) + C_2 (-\sin t) H(t - \pi)$$

$$\sin(t - \pi) = -\sin t$$

0.4 pt

Así $x(t) = \cos t - C_1 \cos t$ $\frac{\pi}{2} < t < \pi$

por lo tanto si $C_1 = 1$

0.8 pt

$$x(t) \equiv 0 \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

Además para $\pi < t$

$$x(t) = \cos t - \cos t + C_2 (-\sin t) = -C_2 \sin t$$

si $C_2 = -3$ tendremos que

$$x(t) = 3 \sin t \quad \text{para } t > \pi.$$

0.8 pt

Otra forma de hacer el problema.

Al introducir

$C_1 \delta_{\frac{\pi}{2}}$ se
de la solución de
en $t = \frac{\pi}{2}^+$

en C_2 la velocidad

$$x'' + x = 0$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

la solución de

$$x'' + x = 0$$

$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

$$\text{es } x(t) = \cos t$$

0.5 pt

Por lo tanto su velocidad es $x'(t) = -\sin t$

En $t = \frac{\pi}{2}^-$ tendremos $x(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$x'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

0.5 pt

Por lo tanto si $C_1 = 1$ tendremos

1.0 pt

$$x(\frac{\pi}{2}^+) = 0$$

$$x'(\frac{\pi}{2}^+) = 0$$

Entonces $x(t) = 0$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi$$

Lo mismo hacemos para determinar C_2 necesitamos que la solución de

$$x'' + x = 0$$

$$x(\pi) = 0$$

$$x'(\pi) = C_2$$

0.8 pt

sea $3 \sin t$. Al resolver obtenemos

$$x(t) = C_2(-\sin t)$$

$$\text{Como queremos } -C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = -3$$

0.7 pt

[P2] a) Se observa primera que $(e^{tA})^T = e^{tA^T}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y toda matriz cuadrada A , 0.5pt

ya que por definicion

$$(e^{tA})^T = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right)^T \stackrel{①}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((tA)^k)^T}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t(A^k)^T}{k!} \stackrel{②}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(A^T)^k}{k!} = e^{tA^T}$$

Donde se usa ① $(A+B)^T = A^T + B^T$ y entonces lo mismo vale para una suma infinita convergente

② $(A^k)^T = (A^T)^k$ que proviene de la formula del producto $(AB)^T = B^T A^T$ utilizando inducción.

0.5pt

[Entonces, si $A^T = -A$ se obtiene

$$(e^{tA})^T e^{tA} = e^{tA^T} e^{tA} = e^{-tA} e^{tA} = e^{A(-t+t)} = e^0 = 1.$$

b) El sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X(t)$

es triangular. Hay dos maneras de solucionarlo

Possibilidad 0 Escribir $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ y resolver el sistema

Possibilidad 1

$$\begin{cases} x_1'(t) - x_1(t) = +2x_2(t) + x_3(t) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2'(t) - 2x_2(t) = +x_3(t) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3'(t) - 3x_3(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

0.5pt

directamente:

(3) da $\boxed{x_3(t) = C_3 e^{3t}}$

$C_3 \in \mathbb{R}$
0.5pt

entonces (2) es una ecuacion lineal de orden 1 con coeficientes constantes y lado derecho $+ C_3 e^{3t}$

$$\boxed{x_2(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}}$$

$C_2 \in \mathbb{R}$
0.5pt

entonces (1) es una ecuacion lineal de orden 1 con coeficientes constantes y lado derecho $2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$

$$\boxed{x_1(t) = C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{2t} + \frac{3}{2} C_3 e^{3t}}$$

$C_1 \in \mathbb{R}$

0.5pt

2

Possibilidad 2 La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Possibilidad 2

es diagonalizable porque tiene 3 valores propios distintos

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 3.$$

0.5 pt

Se puede encontrar los siguientes vectores propios asociados

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ya que} \quad A \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ya que} \quad A \vec{v}_2 = 2 \vec{v}_2$$

1 pt

$$\text{y} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 3x \\ 2y + z = 3y \\ 3z = 3z \end{cases}$$

se puede elegir $z = 1$ y se obtiene $y = 1$ y luego

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{Entonces se puede elegir} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion. Utilizando que $A = P D P^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

se sabe que $P e^{tD}$ es una matriz fundamental del sistema y por lo tanto las soluciones del sistema son de la forma

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0.5 pt

P2) c) $X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2t & 2t \\ -4t & 4t \end{pmatrix}}_{A(t)} X(t)$

Queremos demostrar que ① $\Phi'(t) = A(t) \Phi(t) \leftarrow 0.5 \text{ pt}$
 y que ② $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(t)$ es invertible $\leftarrow 0.5 \text{ pt}$

La segunda condición se satisface automáticamente por el hecho que

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 2 - e^0 & e^0 - 1 \\ 2 - 2e^0 & 2e^0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \leftarrow 0.2 \text{ pt}$$

Además, para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} -2te^{t^2} & +2te^{t^2} \\ -4te^{t^2} & 4te^{t^2} \end{pmatrix} = 2t \begin{pmatrix} -e^{t^2} & e^{t^2} \\ -2e^{t^2} & 2e^{t^2} \end{pmatrix} \leftarrow 0.8 \text{ pt}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \\ A(t)\Phi(t) &= 2t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - e^{t^2} & e^{t^2} - 1 \\ 2 - 2e^{t^2} & 2e^{t^2} - 1 \end{pmatrix} \\ &= 2t \begin{pmatrix} -2 + e^{t^2} + 2 - 2e^{t^2} & 1 - e^{t^2} + 2e^{t^2} - 1 \\ -4 + 2e^{t^2} + 4 - 4e^{t^2} & -2e^{t^2} + 2 + 4e^{t^2} - 2 \end{pmatrix} \\ &= 2t \begin{pmatrix} -e^{t^2} & e^{t^2} \\ -2e^{t^2} & 2e^{t^2} \end{pmatrix} = \Phi'(t) \end{aligned}$$

c) 2) La solución del sistema tal que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

es $X(t) = \Phi(t) X(0)$ ya que $\Phi(0) = I_2 \leftarrow 0.5 \text{ pt}$

entonces $X(t) = \Phi(t) X(0)$

$$= \begin{pmatrix} 2 - e^{t^2} & e^{t^2} - 1 \\ 2 - 2e^{t^2} & 2e^{t^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} 2 - e^{t^2} \\ 2 - 2e^{t^2} \end{pmatrix}}$$

$\leftarrow 0.5 \text{ pt.}$

P3 | 1) Se utiliza la transformada de Laplace para transformar la ecuación $mv'(t) + bv(t) = f(t)$ en el dominio de Laplace:

$$(ms + b) \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$$

Ademas se supone que $f(t) = H_0(t) - H_{t_0}(t)$

y por lo tanto $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}(1 - e^{-t_0 s})$

Entonces

$$\mathcal{L}[v(t)](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{ms+b} (1 - e^{-t_0 s})$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{b}}{s} - \frac{\frac{m}{b}}{ms+b} \right) (1 - e^{-t_0 s})$$

$$= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b} \frac{1}{s} e^{-t_0 s} - \frac{1}{s - \frac{-b}{m}} + \frac{1}{s - \frac{-b}{m}} e^{-t_0 s} \right)$$

$$= \frac{1}{b} \left(\mathcal{L}[1](s) - \frac{1}{b} \mathcal{L}[H_{t_0}(t)] - \mathcal{L}[e^{-\frac{b}{m}t}] + \mathcal{L}[H_{t_0}(t) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}] \right)$$

Entonces, por unicidad de la transformada de Laplace para funciones continuas, se obtiene

$$v(t) = \frac{1}{b} \left(1 - H_{t_0}(t) - e^{-\frac{b}{m}t} \left(1 - H_{t_0}(t) e^{+\frac{b}{m}t_0} \right) \right)$$

P3] 1) Posibilidad 2. Con variación de la constante

La ecuación
$$v'(t) + \frac{b}{m} v(t) = \frac{1}{m} (H_0(t) - H_{t_0}(t))$$

es una ecuación lineal de primer orden no homogénea

Entonces se puede resolver con el método de variación de la constante. 0.5 Dado que las soluciones homogéneas son de la forma

$$V_h(t) = k e^{-\frac{b}{m}t} \quad \text{para } k \in \mathbb{R}$$

se puede buscar una solución particular de la forma

$$V_p(t) = e^{-\frac{b}{m}t} \int_0^t e^{\frac{b}{m}s} \times \frac{1}{m} (H_0(s) - H_{t_0}(s)) ds \quad \text{0.5}$$

Además por construcción esta solución particular va a satisfacer

$V_p(0) = 0$, entonces es la solución que buscamos. Ahora. 0.5

$$\int_0^t e^{\frac{b}{m}s} \frac{1}{m} (H_0(s) - H_{t_0}(s)) ds$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^t e^{\frac{b}{m}s} ds - \frac{1}{m} H_{t_0}(t) \int_{t_0}^t e^{\frac{b}{m}s} ds$$

$$= \frac{1}{m} \frac{m}{b} [e^{\frac{b}{m}t} - 1] - \frac{1}{m} H_{t_0}(t) \times \frac{m}{b} [e^{\frac{b}{m}t} - e^{\frac{b}{m}t_0}]$$

Entonces

$$\boxed{V_p(t) = \frac{1}{b} [1 - e^{-\frac{b}{m}t}] - H_{t_0}(t) [1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}]} \quad \text{0.5}$$

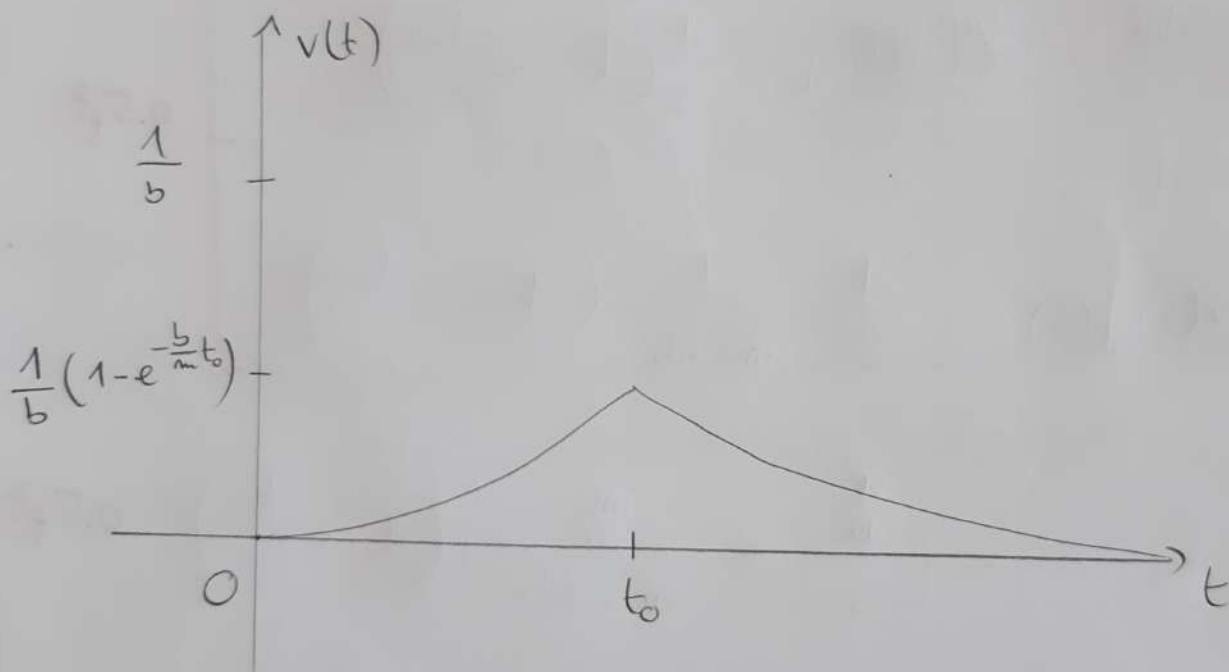
a) 2) En $t=0$ se tiene $v(0) = \frac{1}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}0}) = 0$.

entre 0 y t_0 se tiene $v(t) = \frac{1}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$

en $t=t_0$ $v(t) = \frac{1}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t_0})$

para $t > t_0$ $v(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{b}{m}t} (1 - e^{\frac{b}{m}t_0})$

$$= \frac{1}{b} (e^{-\frac{b}{m}t} - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$



1pt

[P3] b) De manera similar a a) se utiliza la transformada de Laplace para obtener

$$(ms^2 + bs + k) \mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \quad 0.5 \text{ pt}$$

Utilizando que $m = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $k = 1$ y que

$$f(t) = -2e^{-t} \cos(t)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{-2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} \quad 0.5 \text{ pt}$$

Entonces

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \frac{-2(s+1)}{((s+1)^2 + 1) \left(\frac{1}{2}s^2 + s + 1 \right)}$$

$$= \frac{-4(s+1)}{((s+1)^2 + 1)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$= \frac{-4(s+1)}{((s+1)^2 + 1)((s+1)^2 + 1)}$$

$$= \frac{-4(s+1)}{((s+1)^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{+2}{(s+1)^2 + 1} \right) \quad 1 \text{ pt}$$

Entonces, utilizando que

$$\frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \mathcal{L}[e^{-t} \sin(t)]$$

0.5 pt

y la formula $\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[t f(t)](s)$

se obtiene que

$$\mathcal{L}[x(t)] = -\mathcal{L} \mathcal{L}[t e^{-t} \sin(t)](s)$$

Entonces

$$x(t) = -2t e^{-t} \sin(t)$$

0.5 pt

Nota: Se puede también resolver esta pregunta con el método de coeficientes indeterminados, o con variación de parámetros para ecuaciones lineales de orden 2.

Posibilidad 2: Coeficientes indeterminados

La ecuación

$$m x''(t) + b x'(t) + k x(t) = f(t)$$

con $m = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $k = 1$ y $f(t) = -2e^{-t} \cos(t)$

es un sistema lineal con coeficientes constantes cuyo lado derecho anula el operador diferencial $(D - (1+i))(D - (-1-i))$

$$= D^2 + 2D + 2$$

0.5pt.

Además, el sistema se puede reescribir

$$\frac{1}{2} (D^2 + 2D + 2)(x(t)) = f(t)$$

y por lo tanto se puede aplicar el método de coeficientes indeterminados, aquí es el caso resonante.

① Las soluciones homogéneas son de la forma $\leftarrow$ 0.5pt
 $x_h(t) = A e^{-t} \cos(t) + B e^{-t} \sin(t)$ con $A, B \in \mathbb{R}$

② Se puede buscar una solución particular de la forma
 $x_p(t) = C t e^{-t} \cos(t) + D t e^{-t} \sin(t)$

$\leftarrow$ 0.5pt

En este caso, se tiene que

$$x_p'(t) = C(e^{-t}\cos(t) - te^{-t}\cos(t) + te^{-t}\sin(t)) + D(e^{-t}\sin(t) - te^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t))$$

$$x_p'(t) = Ce^{-t}\cos(t) + (D-C)te^{-t}\cos(t) + De^{-t}\sin(t) - (D+C)te^{-t}\sin(t)$$

y luego

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= -Ce^{-t}\cos(t) - Ce^{-t}\sin(t) \\ &\quad + (D-C)[e^{-t}\cos(t) - te^{-t}\cos(t) - te^{-t}\sin(t)] \\ &\quad + De^{-t}\cos(t) - De^{-t}\sin(t) \\ &\quad - (D+C)[e^{-t}\sin(t) - te^{-t}\sin(t) + te^{-t}\cos(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(D-C)e^{-t}\cos(t) + 2(D+C)e^{-t}\sin(t) \\ &\quad - 2Dte^{-t}\cos(t) + 2Cte^{-t}\sin(t) \end{aligned}$$

Entonces la condición $\frac{1}{2}x_p'' + x_p' + x_p = -2e^{-t}\cos(t)$ se puede reescribir

$$\begin{aligned} &[(D-C)+C]e^{-t}\cos(t) + [-(D+C)+D]e^{-t}\sin(t) + \overset{=0}{[C+\cancel{D-C-D}]te^{-t}\cos(t)} \\ &\quad + \overset{=0}{[D-\cancel{D+C}+C]te^{-t}\sin(t)} \\ &= -2e^{-t}\cos(t) \end{aligned}$$

lo que se simplifica en

$$D e^{-t} \cos(t) - C e^{-t} \sin(t) = -2 e^{-t} \cos(t)$$

Por lo tanto se obtiene que $D = -2$ y $C = 0$

$$\boxed{x_p(t) = -2t e^{-t} \sin(t)}$$

1 pt

Además, se verifica que esta solución satisface

$$x_p'(0) = 0 \quad (\text{de la fórmula para } x_p'(t))$$

$$\text{y obviamente } x_p(0) = 0$$

Entonces x_p es la solución que buscamos y no hay que añadir ningún término de la forma

$$A e^{-t} \cos(t) + B e^{-t} \sin(t).$$

0.5 pt

Conclusión:

$$\boxed{x(t) = -2t e^{-t} \sin(t)}$$

Posibilidad 3: Variación de parámetros

Al igual que para la posibilidad 2, se nota que las soluciones homogéneas son de la forma

$$x_h(t) = \underbrace{A e^{-t} \cos(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{B e^{-t} \sin(t)}_{y_2(t)} \quad 0.5 \text{ pt}$$

La fórmula de variación de parámetros dice que 0.5 pt
la solución particular x_p tal que $x_p(0) = x_p'(0) = 0$
es dado por

$$x_p(t) = -y_1(t) \int_0^t 2 \frac{y_2(s) f(s)}{W(s)} ds + y_2(t) \int_0^t 2 \frac{y_1(s) f(s)}{W(s)} ds \quad 0.5 \text{ pt}$$

donde $\cdot$ $y_1(t) = e^{-t} \cos(t)$

$\cdot$ $y_2(t) = e^{-t} \sin(t)$

$\cdot$ $f(t) = -2e^{-t} \cos(t)$

$\cdot$ $W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) & e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) \end{vmatrix}$

$$W(t) = e^{-2t}$$

$\cdot$ El 2 proviene de la normalización de la ecuación.

Hacemos el calculo de la primera integral

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{2y_2(s)f(s)}{W(s)} ds &= \int_0^t \frac{-4e^{-s} \sin(s) e^{-s} \cos(s)}{e^{-2s}} ds \\&= -\int_0^t 4 \sin(s) \cos(s) ds \\&= \int_0^t 2 \sin(2s) ds \\&= \cos(2t) - 1.\end{aligned}$$

0.5 pt

y de la segunda:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{2y_1(s)f(s)}{W(s)} ds &= \int_0^t -4 \cos^2(s) ds \\&= \int_0^t -2[1 + \cos(2s)] ds \\&= -2 \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right] \\&= -2t - \sin(2t)\end{aligned}$$

0.5 pt

Entonces

$$\begin{aligned}x_p(t) &= -e^{-t} \cos(t) [\cos(2t) - 1] + e^{-t} \sin(t) [-2t - \sin(2t)] \\&= -e^{-t} \left[\underbrace{\cos(2t) \cos(t) + \sin(2t) \sin(t)}_{= \cos(2t - t)} - \cos(t) \right] - 2te^{-t} \sin(t) \\&= \cos(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{x_p(t) = -2te^{-t} \sin(t)}$$

0.5 pt.