MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral

Pauta C3

1. Considere la curva C definida por la ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$ fijo.

a) Calcule la longitud del arco en el primer cuadrante.
Observación: analice para qué valores de x la curva está bien definida y la misma se encuentra en el primer cuadrante.

Demostración. Para calcular la longitud del arco en el primer cuadrante primero es importante despejar y en función de x. Haciendo esto nos queda

$$\begin{aligned} x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3} \\ y^{2/3} &= a^{2/3} - x^{2/3} \\ y &= (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}. \end{aligned}$$

+0.5

+0.4 Inicio Argumento

Donde la última igualdad queda con y, no con $-y$. Esto, pues estamos en el primer cuadrante. Ahora, aplicaremos el cálculo de longitud de la curva. Veamos que esto solo tiene sentido con $0 \leq x \leq a$, pues

- x está en el primer cuadrante ($x \geq 0$) +0.3
- $a^{2/3} - x^{2/3} \geq 0$, pues está dentro de una raíz cuadrada ($y = (\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}})^3 \in \mathbb{R}$). De modo que $x^{2/3} \geq a^{2/3}$, luego $x^2 \geq a^2$ y finalmente $x \geq a$ ($x \geq 0$, pues estamos en el primer cuadrante). +0.3

Así, lo siguiente será obtener el siguiente cálculo

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$ +0.2

Para esto, falta obtener $\dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= ((a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})' \\ &= 3/2 \cdot (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-\frac{2}{3} x^{-1/3}) \\ &= (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-x^{-1/3}) \\ &= -((a/x)^{2/3} - 1)^{1/2} \end{aligned}$$

+0.7

Así, ahora

$$\begin{aligned}
L(C) &= \int_0^a \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx \\
&= \int_0^a \sqrt{1+(-((a/x)^{2/3}-1)^{1/2})^2}dx \\
&= \int_0^a \sqrt{1+((a/x)^{2/3}-1)}dx \\
&= \int_0^a \sqrt{(a/x)^{2/3}}dx \\
&= \int_0^a (a/x)^{1/3}dx \\
&= \frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3}\Big|_0^a \\
&= \frac{3}{2}a^{1/3}a^{2/3} = \frac{3a}{2}
\end{aligned}$$

+0.6 □

b) Calcule el área del manto generado al rotar C en torno al eje Y.

Demostración. En la prueba calcularon en torno al eje X, así que calcularemos ese en la pauta. Sin embargo, al ser simétrica la figura, deberían llegar al mismo resultado al calcular la superficien en torno al eje Y.

La fórmula para calcular la superficie de un sólido de revolución en torno al eje X es

$$S(C) = 2\pi \int_0^a y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

→ Fórmula dada, va sin puntaje

Reemplazando lo que ya tenemos de la parte a), tenemos

$$S(C) = 2\pi \int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2} \cdot (a/x)^{1/3}dx$$

+1.0

Usando el cambio de variable

$$\begin{aligned}
u &= a^{2/3} - x^{2/3} \\
du &= -(2/3)x^{-1/3} \\
\text{límite superior: } x &= a \to u = 0 \\
\text{límite inferior: } x &= 0 \to u = a^{2/3}
\end{aligned}$$

+0.5

Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} S(C) &= 2\pi \int_{a^{2/3}}^{0} u^{3/2} \cdot (-3/2)a^{1/3} du \\ &= 2\pi(-3/2)a^{1/3} \int_{a^{2/3}}^{0} u^{3/2} du \\ &= 2\pi(-3/2)a^{1/3}(2/5)u^{5/2}\Big|_{a^{2/3}}^{0} \\ &= (-6\pi/5)a^{1/3}(-a^{2/3})^{5/2} \\ &= (6\pi/5)a^2 \end{aligned}$$

Hallando la superficie pedida. +1.5 □

2. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y defina

$$G(x) = \int_0^x f(e^t)dt + \int_1^{e^x} \ln(t)f'(t)dt.$$

Demuestre que $G(x) = f(e^x)x$.

Demostración. Aplicando TFC se tiene que $G'(x) = f(e^x) + \ln(e^x)f'(e^x)e^x = f(e^x) + xf'(e^x)e^x = (f(e^x)x)'$. +1.5 Luego $G(x) = f(e^x)x + C$. (+0.5) Para determinar C evaluamos en $x = 0$ y vemos que $G(0) = 0 = f(1)0 + C$ y por lo tanto $C = 0$, con lo que se tiene lo pedido □ +1.0

b) Sea $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{sin(t)}{t}dt$. Demuestre que $F(x)$ tiene un óptimo x^* que satisface

$$-1/2 \leq sin((x^*)^2) \leq 1/2$$

Demostración. Para encontrar un óptimo, aplicaremos la regla de Fermat. Esto es $F'(x^*) = 0$. Aplicando TFC, dado que $\sin(t)/t$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_x^{x^2} \frac{sin(t)}{t}dt\right)' \\ &= \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \frac{2\sin(x^2)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

+1.0

Ahora, aplicando regla de Fermat

$$\begin{aligned} \frac{2\sin((x^*)^2)}{x^*} - \frac{\sin(x^*)}{x^*} &= 0 \\ 2\sin((x^*)^2) &= \sin(x^*) \\ \sin((x^*)^2) &= \frac{\sin(x^*)}{2} \end{aligned}$$

+0.5

De donde, si $x^* = 0$, se satisface la desigualdad necesaria. De otro modo, si $x^* \neq 0$, podemos simplificarlo, obteniendo la última igualdad. Ahora, recordando que

+0.5

$$-1/2 \leq \sin(x)/2 \leq 1/2, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

+0.5

tenemos que

$$-1/2 \leq \sin((x^*)^2) \leq 1/2$$

demostrando lo pedido. □

+0.5

3. a) Estudie la convergencia de:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Demostración. ***Primera forma:***

Por criterio de comparación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/2}}$$

+1.0 por usar buena comparación

Usando L'Hopital Obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0.$$

+1.0

Lo que nos dice que la función que queremos integrar tiende a cero más rápido que la función con la que queremos calcular. Luego, como sabemos que:

+0.5

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

converge, nuestra integral también.

+0.5

Otra forma:

Por comparación:

Sabemos que:

$$0 \leq \ln(x) \leq x^{1/2}, \ \forall x > 1$$

+1.0

Luego:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}, \ \forall x > 1$$

+1.5

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge, nuestra integral también.

+0.5

Otra forma:

Resolvemos la integral indefinida por partes haciendo:

$$u = \ln(x) \qquad du = dx/x$$
$$dv = dx/x^2 \qquad v = -1/x$$

+0.5

Entonces:

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x} + -\frac{1}{x} = -\frac{1 + \ln(x)}{x}$$

+1.0

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1+\ln(x)}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1+ln(b)}{b} + 1 = 1$$

Uso de variable + Lim +0.5

Dado que:

+0.5

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{ln(b)}{b} = 0 \text{ y } \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0$$

+0.5

El primero puede demostrarse por L'Hopital.

□

b) Encuentre los valores para $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_1^\infty \frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1dx = 1.$$

Observación: Analice primero qué relación debe haber entre a y b para que la integral sea convergente, y luego para esos valores calcule la misma para determinar los valores de a y b.

Demostración. Escribimos la función como una fracción para comparar los grados del numerador y denominador. Como:

$$\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1 = \frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}$$

Claramente los dos polinomios, el de denominador y numerador tienen el mismo grado a no ser que $b-a=0$, luego para que la integral tenga opción de converger, necesitamos que $a=b$. Así nuestra integral se convierte en:

+0.5

$$\int_1^\infty \frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1dx = \int_1^\infty \frac{a}{x(2x+a)}$$

+0.5

Usando fracciones simples:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{a}{x(2x+a)} &= \int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{2}{(2x+a)}\\ &= ln(x) - ln(2x+a)\\ &= ln(\frac{x}{2x+a})\Big|_1^\infty\\ &= \lim_{x\to\infty} ln(\frac{x}{2x+a}) - ln\left(\frac{1}{2+a}\right)\end{aligned}$$

+0.5 Fracciones Parciales

+0.2

Como el logaritmo es una función continua:

+0.3

$$\lim_{x\to\infty} ln(\frac{x}{2x+a}) - ln(\frac{1}{2+a}) = \ln(\frac{2+a}{2})$$

+0.5

Luego queremos que:

$$\ln\frac{2+a}{2} = 1 \iff a = b = 2e-2$$

+0.5

□