Pauta de corrección Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Calcule la siguiente primitiva

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\, \mathrm{d}x.$$

Indicación: Puede usar el cambio de variable $x = u^6$.

Solución

Usando el cambio de variable

$$x = u^6,$$

(0,2 pts. por usar el cambio de variable dado en la indicación)

vamos a tener que $\mathrm{d}x = 6u^5\, \mathrm{d}u$. Luego, la primitiva queda

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\, \mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{u(u+1)}\, \mathrm{d}u. \tag{1}$$

(0,7 pts. por realizar la sustitución de manera correcta)

Ahora, se usará el método de fracciones parciales para separar esta primitiva como una suma. Se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)},$$

(0,4 pts. por usar el método de fracciones parciales)

de donde resulta la siguiente igualdad

$$A(u+1)+Bu = 1. \tag{2}$$

(0,3 pts. por obtener la ecuación que relaciona las constantes A y B)

Para encontrar A y B se pueden usar los siguientes métodos:

Primera forma (Igualando coeficientes)

De la igualdad (2) resulta que $(A+B)u + A = 1$. Como esta es una igualdad de polinomios, debe ser válida para todos los coeficientes. De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Como $A = 1$ sustituyendo en la primera ecuación, resulta que $B = -1$.

(0,3 pts. por obtener los valores de A y B)

Segunda forma (Evaluando)

Como (2) es una igualdad de polinomios, es válida evaluando en cualquier $u \in \mathbb{R}$ (o incluso $u \in \mathbb{C}$). Evaluando (por ejemplo) en $u = -1$ y en $u = 0$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -B &= 1 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

de donde se concluye que $A = 1$ y $B = -1$.

(0,3 pts. por obtener los valores de A y B)

Volviendo a (1), se obtiene de este modo que

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 6\left(\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u\right) = 6\left(\ln|u| - \ln|u+1|\right) + C.$$

(0,7 pts. por calcular la primitiva)

Finalmente, volviendo a la variable original queda

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 6\left(\ln\left(\sqrt[6]{x}\right) - \ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right) + C.$$

(0,4 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

Indicaciones de corrección

- Es probable que la resolución entregada no sea tan detallada como la pauta y se reduzca a un cálculo en un par de líneas. En dicho caso lo importante es que se describa el proceso de manera clara y que se llegue al resultado correcto al ser coherente con su desarrollo.
- Restar **(0.1 pts.)** sino escriben la constante de la primitiva.

b) **(3,0 pts.)** Calcule la siguiente integral

$$\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Indicación: Puede usar que $\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2}$.

Solución

Cálculo de la integral definida en cada paso

Denotemos por I el valor de la integral solicitada. Primero consideramos el cambio de variables $u = x-2$, luego $du = dx$ y por tanto $u = -1$ cuando $x = 1$ y $u = 1$ cuando $x = 3$, de esta forma

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{u+4}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

(1 pt.)

Ahora separamos la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u + 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

La primera integral tiene integrando impar sobre un intervalo simétrico al rededor del origen, por lo tanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = 0.$$

(1 pt.)

La segunda integral es conocida:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right),$$

(0,5 pts.)

entonces

$$4\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4-u^2}} = 4\left[\arcsin\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = 4\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\frac{-1}{2}\right).$$

Como $\arcsin(1/2) = \pi/6$ y $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$, resulta

$$4\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

En resumen

$$\int_{1}^{3} \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3}.$$

(0,5 pts.)

Indicaciones de corrección

La integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

también se puede calcular con sustitución: Sea $w = 4-u^2$, entonces $\mathrm{d}w = -2u\,\mathrm{d}u$, por lo que $u\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w$. Además, cuando $u = -1$ y $u = 1$, en ambos casos $w = 3$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = \int_{3}^{3} -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w.$$

Como los límites de integración son iguales, el valor de la integral es cero.

Cálculo de una primitiva directa y luego evaluar en los extremos de la integral

Primero consideramos el cambio de variables $u = x - 2$, luego $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ y por tanto

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u+4}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

(0,6 pts.)

Ahora separamos las integrales

$$\int \frac{u+4}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u + 4\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Primera integral:

$$\int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Sea $w = 4 - u^2$, entonces $\mathrm{d}w = -2u\,\mathrm{d}u$, por lo tanto $u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w$.

$$\int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{w} = -\sqrt{4-u^2}.$$

(0,6 pts.)

Segunda integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right).$$

(0,6 pts.)

Combinando los resultados y volviendo a la variable original

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\,\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

(0,6 pts.)

Finalmente, en el caso de la integral definida se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]\Bigg|_1^3 \\
&= -\sqrt{4-(3-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{3-2}{2}\right) - \left(-\sqrt{4-(1-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{1-2}{2}\right)\right) \\
&= -\sqrt{3} + 4\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\sqrt{3} + 4\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(0,6 pts.)

Cálculo de una primitiva usando sustitución trigonométrica y luego evaluar en los extremos de la integral

Primera sustitución: Sea $u = x - 2$, entonces $x = u + 2$ y $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Así,

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u+4}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

(0,6 pts.)

Segunda sustitución trigonométrica: Sea $u = 2\operatorname{sen}\theta$ (o equivalentemente $\theta = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right)$) de modo que $du = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ y $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$.

$$\int \frac{u+4}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2\operatorname{sen}\theta + 4}{2\cos\theta}\,(2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) = \int (2\operatorname{sen}\theta + 4)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int (2\operatorname{sen}\theta + 4)\,\mathrm{d}\theta = -2\cos\theta + 4\theta + C.$$

(0,8 pts.)

Volvemos a las variables originales usando las identidades:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-u^2}}{2}.$$

Se llega a

$$-2\cos\theta + 4\theta = -\sqrt{4-u^2} + 4\,\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + C.$$

(0,4 pts.)

Sustituyendo $u = x - 2$:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

(0,6 pts.)

Finalmente, en el caso de la integral definida se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]\Bigg|_1^3 \\
&= -\sqrt{4-(3-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{3-2}{2}\right) - \left(-\sqrt{4-(1-2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{1-2}{2}\right)\right) \\
&= -\sqrt{3} + 4\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\sqrt{3} + 4\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(0,6 pts.)

Indicaciones de corrección

- Si un/a estudiante al utilizar la indicación indentifica que $x - 2 = 2\operatorname{sen}\theta$, $x = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ sin usar algún cambio de variable e incorpora correctamente esta información en

  $$\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

  el proceso se considera correcto y se debe asignar los **(2,4 pts.)** correspondientes. Esto es, puede calcular la primitiva

  $$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{(2+2\operatorname{sen}\theta)+2}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}} 2\cos\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int (4+2\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int \mathrm{d}\theta + 2\int \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\theta - 2\cos\theta + C,$$

$$= 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - \sqrt{4-(x-2)^2} + C$$

y finalmente, evaluar en los límites de integración.

- Es probable que la resolución entregada no sea tan detallada como la pauta y se reduzca a un cálculo en un par de líneas. En dicho caso lo importante es que se describa el proceso de manera clara y que se llegue al resultado correcto al ser coherente con su desarrollo.
- Restar **(0.1 pts.)** sino escriben la constante de la primitiva.

P2. a) **(3,0 pts.)** Usando la regla de la cadena apropiadamente, calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}.$$

Solución

Se usará el teorema fundamental del cálculo junto con la regla de L'Hôpital.
Primero, note que la función e^{-t^2} es continua al ser combinaciones de funciones exponenciales y polinomios.

(0,2 pts. por justificar que esta función es continua)

Por el teorema fundamental del cálculo, se concluye que la función

$$\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

es derivable **(0,2 pts. por justificar que esta función es derivable)**, más aún

$$\left(\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x).$$

Además, $x\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ es derivable al ser producto de funciones derivables. Por otro lado, tenemos que $1-\cos(x)$ es derivable, más aún

$$(1-\cos(x))' = \operatorname{sen}(x).$$

(0,2 pts. por derivar el denominador)

Asimismo, estas últimas funciones son continuas, por lo que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0$ y también $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 0$, lo que muestra que el límite es del tipo "$\frac{0}{0}$".

(0,2 pts. por justificar que el límite es de la forma "$\frac{0}{0}$")

De esta manera,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{1-\cos(x)} \overset{(\text{l'Hôp.})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

(0,4 pts. por usar la regla de L'Hôpital)

(0,3 pts. Aplica la derivada del producto en el numerador)
(0,5 pts. Deriva la integral del numerador usando el TFC)

Ahora, como $xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)$ es derivable por álgebra y composición de funciones derivables, entonces

$$\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)$$

es derivable al ser suma de funciones derivables. Además, la función $\operatorname{sen}(x)$ es derivable. Asimismo, estas funciones son continuas, por lo que $\lim_{x\to 0}\left(\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0$ y también $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x) = 0$, lo que muestra que el límite es del tipo "$\frac{0}{0}$".

(0,2 pts. por argumentar que se puede usar nuevamente la regla de l'Hôpital)

Así pues,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) + (xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x))'}{\cos(x)}.$$

(0,4 pts. por usar la regla de l'Hôpital)

Ahora, como

$$(xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x))' = e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) - x(\operatorname{sen}(2x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x))e^{-\operatorname{sen}^2(x)},$$

(0,2 pts. por usar de manera correcta la regla del producto)

entonces el último límite del lado derecho nos queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) + (e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) - x(\operatorname{sen}(2x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x))e^{-\operatorname{sen}^2(x)})}{\cos(x)},$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) - x(\operatorname{sen}(2x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x))e^{-\operatorname{sen}^2(x)}}{\cos(x)}\\ &= 2.\end{aligned}$$

(0,2 pts. por encontrar el valor correcto del límite)

Indicaciones de corrección

- Si un/a estudiante encuentra una expresión diferente para

$$(xe^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x))',$$

pero se ha utilizado de manera correcta la regla del producto, asignar los **(0,2 pts.)** correspondientes.

- Es probable que la resolución entregada no sea tan detallada como la pauta y se reduzca a un cálculo en un par de líneas. En dicho caso lo importante es que se describa el proceso de manera clara y que se llegue al resultado correcto al ser coherente con su desarrollo.

b) Considere las funciones $F, G\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \int_0^x te^{-t}\ \mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^x \cos(\pi x)e^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Sea además $H\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$H(x) = F(x) - 2G'(x).$$

I) **(0,5 pts.)** Justifique que H es Riemann integrable en $[0,1]$.

Solución

Se tiene que H es Riemann integrable, ya que es continua. Note que H resulta continua porque:

(i) $F(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt$ es derivable, pues te^{-t} es continua y por el teorema fundamental del cálculo, luego F es continua.

(0,2 pts. por justificar que F es continua)

(ii) $G(x) = \int_0^x \cos(\pi x)e^{-t^2}\,dt = \cos(\pi x)\int_0^x e^{-t^2}dt$ es derivable. Aplicando la regla del producto y el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$G'(x) = -\pi\operatorname{sen}(\pi x)\int_0^x e^{-t^2}dt + \cos(\pi x)\,e^{-x^2},$$

y la última expresión es una suma y producto de funciones continuas, por lo que G' es continua.

(0,3 pts. por justificar que G es continua)

Indicaciones de corrección

- Es probable que el argumento entregado por un/a estudiante no esté tan detallada como la pauta, lo importante es que establezcan que necesitan de la continuidad de las funciones que definen a H.
- Asignar hasta **(0,2 pts.)** si un/a estudiante menciona que necesita solo la continuidad de G, pues se debe tener en cuenta que H está definida a partir de G'.
- No se debe descontar puntaje si los/as estudiantes no mencionan que H es continua por álgebra de funciones continuas.

II) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$H(1) = 1.$$

Indicación: Puede usar que $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\ \mathrm{d}t = -2e^{-1}+1.$

Solución

Como $H(x) = F(x) - 2G'(x)$, entonces

$$H(1) = F(1) - 2G'(1).$$

(0,2 pts. por determinar $H(1)$)

De esta manera:

1°) Usando la indicación tenemos que

$$F(1) = \int_0^1 te^{-t}\ \mathrm{d}t = -2e^{-1}+1.$$

(0,3 pts. por utilizar la indicación de manera correcta para determinar $F(1)$)

2°) Por otro lado, como

$$G(x) = \cos(\pi x)\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t,$$

utilizando la regla del producto junto con el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$G'(x) = (\cos(\pi x))'\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t + \cos(\pi x)\left(\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)'$$

(0,3 pts. por utilizar la regla del producto correctamente)

$$= \cos(\pi x)e^{-x^2} - \pi\operatorname{sen}(\pi x)\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t,$$

(0,7 pts. por utilizar el teorema fundamental del cálculo de manera correcta)

donde se usó la diferenciabilidad de la función $\cos(\pi x)$ y que $\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ es derivable porque e^{-t^2} es continua y por el teorema fundamental del cálculo.

(0,2 pts. por justificar la hipótesis del teorema fundamental del cálculo)

De este modo, evaluando en $x = 1$, concluimos que

$$\begin{aligned} G'(1) &= \cos(\pi)e^{-1} - \pi\operatorname{sen}(\pi)\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t && \textbf{(0,3 pts. por evaluar en } \boldsymbol{x=1} \textbf{ correctamente)} \\ &= -e^{-1}, && \textbf{(0,2 pts. por determinar el valor correcto de } \boldsymbol{G'(1)}\textbf{)} \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\cos(\pi) = -1, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Finalmente, combinando los valores de $F(1)$ y $G'(1)$ en **1°)** y **2°)**, obtenemos que

$$H(1) = 1.$$

(0,3 pts. por encontrar el valor correcto de $H(1)$)

Indicaciones de corrección

- Si no se justifica la hipótesis para utilizar el teorema fundamental del cálculo, se debe descontar los **(0,2 pts.)** correspondientes. Si se justifica parcialmente, se debe asignar puntaje parcial.

P3. Sea $f\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

a) **(0,5 pts.)** Muestre que f es Riemann integrable en $[0,\pi/2]$.

b) **(0,5 pts.)** Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ la partición equiespaciada de $[0,\pi/2]$, es decir $x_i = \frac{i\pi}{2n}$ con $i = 0, \ldots, n$. Defina

$$f_-(x) = \begin{cases} \cos(x_1), & x \in [x_0, x_1) \\ \cos(x_2), & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ \cos(x_n), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad f_+(x) = \begin{cases} \cos(x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ \cos(x_1), & x \in (x_1, x_2] \\ \vdots \\ \cos(x_{n-1}), & x \in (x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Muestre que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

c) **(3,5 pts.)** Deduzca que para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ se tiene que

$$\frac{\pi}{2n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}.$$

Indicación: Puede usar (sin necesidad de demostrar) las siguientes identidades tigonométricas.

- $\cos(k\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, donde $k, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, donde $A, B \in \mathbb{R}$.

d) **(1,5 pts.)** A partir de los apartados b) y c) encuentre el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observación: Solo está permitido usar los ítems b) y c). Cualquier otro método será invalidado.

Solución

a) Cualquiera de los siguientes argumentos justifican que f es Riemann integrable en $[0,\pi/2]$

- f es continua en $[0,\pi/2]$.
- f es decreciente en $[0,\pi/2]$.

(0,5 pts. por entregar cualquiera de estos argumentos)

b) Notamos que la partición equiespaciada $P = \left\{x_i = \frac{i\pi}{2n} : n = 0, \ldots, n\right\}$ sobre $[0,\pi/2]$ es tal que f_+ y f_- son constantes en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) donde $i = 1, \ldots, n$. Eston nos dice que f_+ y f_- son escalonadas

(0,2 pts. por mostrar que f_+ y f_- son escalonadas)

Además f es decreciente, por lo que

$$(\forall i = 1, \ldots, n-1)(\forall x \in [x_{i-1}, x_i))(\cos(x_i) \leq \cos(x)) \wedge \forall x \in [x_{n-1}, x_n])(\cos(x_n) \leq \cos(x))$$

y por lo tanto $(\forall x \in [0,\pi/2])(f_-(x) \leq f(x))$, es decir $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$. En forma similar, y nuevamente gracias a que f es decreciente en $[0,\pi/2]$ se tiene que

$$(\forall x \in [x_0, x_1])(\cos(x_0) \leq \cos(x)) \wedge (\forall i = 2, \ldots, n)(\forall x \in (x_{i-1}, x_i])(\cos(x_{i-1}) \leq \cos(x))$$

y por lo tanto $(\forall x \in [0,\pi/2])(f(x) \leq f_+(x))$, es decir $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

(0,1 pts. por indicar que $\cos(x)$ es decreciente en $[0,1]$)

(0,2 pts. por mostrar que que $f_-(x) \leq \cos(x) \leq f_+(x)$ en $[0,1]$)

c) Gracias a que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$ se tiene que

$$\int_0^{\pi/2} f_-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} f_+(x)\,\mathrm{d}x.$$

(0,7 pts. por esta desigualdad)

Calculamos la integral de f_-

$$\int_0^{\pi/2} f_-(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \cos(x_i)\frac{\pi}{2n} \qquad \text{Def. integral función escalonada}$$

(0,7 pts.)

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(i\frac{\pi}{2n}\right) \qquad \text{Prop. suma y reemplazo } x_i = \frac{i\pi}{2n}$$

(0,3 pts.)

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sen}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \qquad \text{Ind. (1) con } k = i, \alpha = \frac{\pi}{2n}$$

(0,4 pts.)

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] \qquad \text{Suma telescópica}$$

(0,7 pts.)

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4n}\right). \qquad \text{Ind. (2) con } A = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}, B = \frac{\pi}{4n}$$

(0,5 pts.)

Para la integral de f_+ los cálculos son similares

(0,2 pts. por entregar esta indicación)

$$\int_0^{\pi/2} f_+(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \cos(x_{i-1})\frac{\pi}{2n} \qquad \text{Def. integral función escalonada}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \cos(x_i)\frac{\pi}{2n} \qquad \text{Prop. de la sumatoria}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(i\frac{\pi}{2n}\right) \qquad \text{Prop. suma y reemplazo } x_{i-1} = \frac{(i-1)\pi}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sen}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \qquad \text{Ind. (1) con } k = i, \alpha = \frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4n}\right)\right] \qquad \text{Suma telescópica}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4n}\right) \qquad \text{Ind. (2) con } A = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}, B = \frac{-\pi}{4n}$$

concluimos entonces que

$$\frac{\pi}{2n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$

tal como se solicita.

d) En la desigualdad anterior calculamos el límite cuando n tiende a infinito.

(0,2 pts. por entregar esta indicación)

Para simplificar escribimos $\epsilon = \frac{\pi}{4n}$. De esta manera, $n \to \infty$ es equivalente a que $\epsilon \to 0$,

(0,2 pts. por este cambio de variables) luego

$$\frac{\pi}{2n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\epsilon\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\epsilon}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\epsilon\right) \qquad \text{usamos } \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\epsilon}\left(\cos\epsilon-\operatorname{sen}\epsilon\right) \qquad \text{usamos fórmula de coseno de la suma}$$

(0,3 pts.)

luego

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\epsilon}\left(\cos\epsilon-\operatorname{sen}\epsilon\right)=1$$

pues $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\epsilon}=1$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\cos\epsilon=1$ y $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\operatorname{sen}\epsilon=0$.

(0,3 pts. por calcular el límite)

En forma similar

$$\frac{\pi}{2n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}=\frac{\epsilon\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\epsilon}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\epsilon\right) \qquad \text{usamos } \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\epsilon}\left(\cos\epsilon+\operatorname{sen}\epsilon\right) \qquad \text{usamos fórmula de coseno de la suma}$$

luego

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\operatorname{sen}\epsilon}\left(\cos\epsilon+\operatorname{sen}\epsilon\right)=1$$

(0,2 pts. por calcular este límite)

en definitiva

$$\int_0^{\pi/2}\cos(x)dx=1.$$

(0,3 pts.)

Indicaciones de corrección

-

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.