



PAUTA CONTROL 2

- P1. a) (3 puntos) Exprese en la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el complejo $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$.

Solución

Usando forma polar $z = (-1/2 + i\sqrt{3}/2) = e^{i2\pi/3}$ (1 punto).

Luego $z^4 = e^{i8\pi/3}$ (1 punto).

Luego $z^4 = e^{i8\pi/3} = e^{i2\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ (1 punto).

Nota: Hay varias maneras alternativas, por ejemplo notando que z es una raíz tercera de la unidad, luego $z^4 = z$. Esta solución breve y cualquier otra solución correcta lleva el puntaje completo (como por ejemplo, realizar el cálculo multiplicando término a término). Si la solución es parcialmente correcta, usar como motivación para distribuir el puntaje el desglose de la pauta.

- b) (3 puntos) Considere la función $f(z) = f(x + iy) = x^2 + iy^2$. Demuestre que f es holomorfa (diferenciable) en todos los puntos de la línea $z = x + ix \in \mathbb{C}$ (es decir, en la recta $y = x$). Demuestre además, que f no es holomorfa (diferenciable) en todo $\mathbb{C}$. Justifique adecuadamente sus respuestas.

Solución

Podemos escribir en forma vectorial la función $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, donde $u(x,y) = x^2$ y $v(x,y) = y^2$ (0.5 punto).

Como todas sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$, entonces es Frechet-derivable en $\mathbb{R}^2$ (0.5 punto).

Además, las derivadas parciales cumplen $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$ (0.5 punto).

Luego, las condiciones de C-R se cumplen ssi $x = y$ (0.5 punto).

Por teorema visto en clases, concluimos que f es derivable en z_0 ssi $z_0 = x + ix$ con $x \in \mathbb{R}$ (0.5 punto).

Para que f sea holomorfa en un punto necesitamos que exista un radio tal que en el disco centrado en el punto la función sea diferenciable. Supongamos por contradicción que $\exists z_0$ y $r > 0$ tal que $f \in H(D_r(z_0))$. Si $D_r(z_0) \cap \{x + ix : x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ no hay nada que probar, ya que la función no es diferenciable en ningún punto de $D_r(z_0)$ por la parte anterior, por lo tanto $f \notin H(D_r(z_0))$. Si $D_r(z_0) \cap \{x + ix : x \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, podemos considerar $\omega = x_0 + ix_0 \in D_r(z_0)$. Luego como $D_r(z_0)$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\tilde{\omega} = x_0 + \epsilon + ix_0 \in D_r(z_0)$. Sin embargo, por la parte anterior f no puede ser diferenciable en $\tilde{\omega}$, lo que implica que $f \notin H(D_r(z_0))$. Como z_0 y r son arbitrarios, f no puede ser holomorfa en ningún punto (0.5 punto).

Nota: Si la demostración de Frechet diferenciable se hace por definición y está correcta, también lleva puntaje completo el ítem de demostrar que la función es Frechet diferenciable.

- P2.** a) (3 puntos) Argumente por qué la integral de $\exp(z)$ sobre $\partial D_1(0)$ es cero, es decir, porque

$$\oint_{|z|=1} \exp(z) dz = 0.$$

Solución

Se demostro en clases que $\exp(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ (1 punto).

La integral es sobre $\partial D_1(0)$ que es un camino simple, regular por pedazos y cerrado (1 punto).

Podemos aplicar el teorema de Cauchy - Goursat para concluir que la integral es cero (1 punto).

Nota: Si la argumentación es correcta usando Teorema de los residuos o cualquier otro resultado que se haya visto en clases, asignar el puntaje completo (como por ejemplo, que la funcion tiene primitiva, luego su integral es cero). Si la respuesta es parcialmente correcta, usar como motivación para la asignación de puntaje el desglose de puntajes de la pauta.

- b) (3 puntos) Suponga que $f = u + iv$ es holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, donde u y v son de clase C^2 . Pruebe que u y v son armónicas en Ω , es decir, $\Delta u = \Delta v = 0$, donde Δ es el operador Laplaciano, definido por

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Solución

Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales de clase C^2 .

Como f es holomorfa, las funciones u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

(0.5 puntos)

Demostremos que u es armónica. Pare ello, derivemos la primera ecuación de (1) con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Ahora, derivemos la segunda con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Sumando ambas igualdades, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Como $v \in C^2(\Omega)$, se cumple el teorema de la conmutatividad de las derivadas mixtas, es decir, $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ (0.5 puntos). Por tanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

lo cual prueba que u es armónica en Ω .

Demostremos ahora que v es armónica. Para ello, derivemos la segunda ecuación de (1) con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Y la primera con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Aplicando nuevamente la igualdad de las derivadas mixtas $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (0.5 puntos), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Por lo tanto, ambas funciones u y v satisfacen la ecuación de Laplace en el dominio Ω :

$$\Delta u = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = 0. \quad (0.3 \text{ puntos})$$

P3. Calcule las siguientes integrales complejas. Puede escoger el método que considere conveniente y debe justificar cada paso. Considere que si la curva sobre las que se integra es cerrada, entonces está recorrida en sentido anti-horario.

a) (2 puntos) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz.$

Solución

Denotemos $f(z) = \sin(z)$.

Por propiedad vista en clases $f'(z) = \cos(z)$ (0.2 puntos).

Además, $f \in H(\mathbb{C})$, por propiedad vista en clases (0.2 puntos).

Luego la integral se puede escribir como $\oint_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ (0.2 puntos).

Usando las consecuencias del teorema de los residuos vistas en clases, obtenemos que $\oint_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \# \{ \text{ceros de } f \text{ dentro de la curva } \partial D_1(0) \}$ (1 punto).

Además, $\# \{ \text{ceros de } f \text{ dentro de la curva } \partial D_1(0) \} = 1$, pues $f(z) = 0$ ssi $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, y además, para $k \in \mathbb{Z}$, $|k\pi| < 1$ ssi $k = 0$ (0.2 puntos).

Concluimos que $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz = 2\pi i$ (0.2 puntos).

Nota: Si la argumentación es correcta usando Teorema de los Residuos o cualquier otro resultado que se haya visto en clases, asignar el puntaje completo. Si la respuesta es parcialmente correcta, usar como motivación para la asignación de puntaje el desglose de puntajes de la pauta.

b) (2 puntos) $\int_{\Gamma} z^2 dz$, donde $\Gamma = \{t + it : t \in [0, 1]\}$.

Solución

Por definición $\int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^1 \gamma(t)^2 \gamma'(t) dt$, para $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) = t + it$ (1 punto).

Además, $\gamma'(t) = 1 + i$ y $\gamma(t)^2 = t^2(1 + i)^2 = t^2(1 + 2i - 1) = 2it^2$ (0.5 puntos).

Luego, $\int_0^1 \gamma(t)^2 \gamma'(t) dt = 2i(1 + i) \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}(-1 + i)$ (0.5 puntos).

c) (2 puntos) $\oint_{\partial D_2(1+i)} \frac{\exp(z^2)}{(z - 5)^6 z} dz$.

Solución

Primero buscamos los ceros de $(z - 5)^6 z$ encerrados por la curva $\partial D_2(1 + i)$, y notamos que solo incluye a $z_0 = 0$, pues los otros ceros son $z_1 = 5$ de multiplicidad 6, pero $|5 - (1 + i)| = |4 - i| = \sqrt{17} > 2$ (0.5 puntos).

Ahora podemos resolver el problema usando la Fórmula de Cauchy de la siguiente manera:

$$\oint_{\partial D_2(1+i)} \frac{\exp(z^2)}{(z-5)^6 z} dz = \oint_{\partial D_2(1+i)} \frac{f_1(z)}{z} dz = 2\pi i f_1(0),$$

donde $f_1(z) = \frac{\exp(z^2)}{(z-5)^6}$, ya que $f_1(z) \in H(\partial D_{2+\epsilon}(1+i))$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño (1 punto).

Finalmente, $\oint_{\partial D_2(1+i)} \frac{\exp(z^2)}{(z-5)^6 z} dz = \frac{2\pi i}{5^6}$ (0.5 puntos).

Nota: Si la argumentación es correcta usando Teorema de los residuos o cualquier otro resultado que se haya visto en clases, asignar el puntaje completo. Si la respuesta es parcialmente correcta, usar como motivación para la asignación de puntaje el desglose de puntajes de la pauta.