Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Primavera 2025 - Control 2
Octubre 25, 2025

P1. Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, donde $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $f(e_3) = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

(a) (1.0 pto.) Pruebe que $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+2z\\2x+y+4z\\x+2z\end{pmatrix}$.

(b) (2.0 ptos.) Determine una base del núcleo de f, es decir, de $\mathrm{Ker}(f)$, e indique si la función es inyectiva.

(c) (2.0 ptos.) Determine una base de $\mathrm{Im}(f)$ e indique si la función es epiyectiva.

(d) (1.0 pto.) ¿Es f un isomorfismo?, es decir, ¿es f una función lineal biyectiva? Justifique.

Pauta:

(a) Sabemos que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\cdot e_1 + y\cdot e_2 + z\cdot e_3$, de donde, como f es lineal, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$. Cambiando por los valores de $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ obtenemos la fórmula. [Puntaje: lo más importante es la parte antes de cambiar por valores, le daría **0,7 ptos.** y a concluir **0.3 ptos.**].

(b) Debemos resolver el sistema lineal homogéneo con matriz de coeficientes $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&4\\1&0&2\end{pmatrix}$. Escalonando obtenemos la matriz: $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. De aquí se tiene que el sisema lineal homogéneo asociado tiene solución: $z \in \mathbb{R}$, $y = 0$ y $x = -2z$ [**0.5 ptos.**] y $Ker(f) =< \{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\} >$ [**0.5 ptos**]. De aquí es directo que f no es inyectiva pues el núcleo no es nulo [**0.5 ptos**]. Daría además **0.5 ptos.** por saber que es el núcleo y que se debe hacer.

(c) Sabemos que $\mathrm{Im}(f)$ está generado por $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ [**0.5 ptos.**] [*también se puede usar la parte a) para decir que* $f((x,y,z)^T) = x(1,2,1)^T + y(2,1,0)^T + z(2,4,2)^T$ *y concluir que la imagen está generada por el conjunto* $\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T, (2,4,2)^T\}$]. Para reducirlo a una base, que por el Teorema de Núcleo Imagen debe ser de 2 elementos, hay que escalonar la matriz dada por estos 3 vectores (lo que ya hicimos antes). Ese escalonamiento muestra que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ son linealmente independientes, luego una base de $\mathrm{Im}(f)$ [**0.5 ptos.**]. Como son solo dos vectores y la dimensión del espacio de llegada es 3, f no es epiyectiva [**0.5 ptos.**]. Daría además **0.5 ptos.** por saber que es la imagen y que se debe hacer.

(d) Por enunciado, la función es lineal pero por los dos puntos anteriores no es biyectiva ya que no es ni inyectiva ni sobreyectiva. [**1 pto. o nada**]

P2. **(a)** (3.0 ptos.) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1 - v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ bases de un espacio vectorial V. Sea $T\colon V \to V$ una función lineal cuya matriz representante con respecto a la base $\mathcal{B}$ en la partida (dominio) y la base $\mathcal{B}'$ en la llegada (codominio), es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz P de pasaje de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, esto es, la matriz representante de I_V donde la base en la partida es $\mathcal{B}'$ y la base en la llegada es $\mathcal{B}$. Use la matriz P junto a la matriz M para demostrar que la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ tanto en la partida (dominio) como en la llegada (codominio), es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (3.0 ptos.) Considere la transformación $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ c+d \end{pmatrix}$.

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{A}$ en la partida y $\mathscr{B}$ en la llegada, donde

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pauta

(a) Para calcular la matriz de pasaje usamos las imágenes de la base de partida $\mathcal{B}'$ por la identidad y calculamos la descomposición en la base de llegada $\mathcal{B}$. Esto nos da:

$$v_1 - v_2 = 1v_1 + (-1)v_2 + 0v_3;\ v_2 + v_3 = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3;\ v_1 - v_3 = 1v_1 + 0v_2 + (-1)v_3,$$

por lo tanto la matriz es

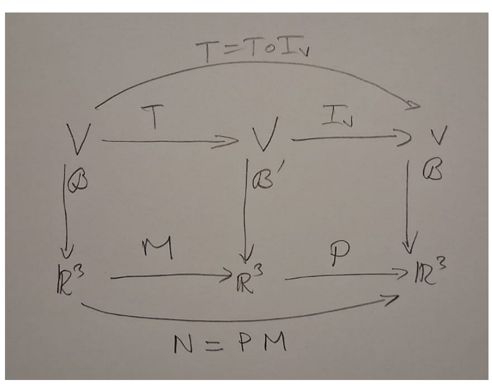
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puntaje: 1 punto por desarrollar los vectores de partida en la base de llegada. 0.5p por la matriz P.

Para la segunda parte. Puntaje: 1 punto por argumentar que

$$N = PM$$

Esto puede hacerse de varias maneras, como composición de transformaciones lineales o por medio de un diagrama (no hay un único diagrama) como el que sigue



Puntaje: Dar 0.5 puntos por el cálculo del producto

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Para calcular la matriz de representante, calculamos las imagenes sucesivas de los vectores de la base de partida y la expresamos en la base de llegada, que es la base canónica, por lo tanto sus coordenadas son directamente las componentes del vector imagen (esto no lo necesitan argumentar) lo que da

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Puntaje: Dar 2 puntos por este cálculo (restar 1 punto por errores de cálculo)

Lo que da la matriz representante: (no tiene nombre en el enunciado!!)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Puntaje: dar 1 punto por escribir la matriz

P3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y consideremos $T : V \to \mathbb{R}$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) \neq V$, es decir es un subespacio vectorial propio.

(a) (3.0 ptos.) Pruebe que T es epiyectiva y que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n - 1$.

(b) (3.0 ptos.) Pruebe que existe $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) \neq 0$ y defina $U = \langle \{v_0\} \rangle$, el subespacio vectorial generado por v_0. Pruebe que

$$\mathrm{Ker}(T) \cap U = \{0\},$$

y concluya que $V = U \oplus \mathrm{Ker}(T)$.

Pauta

(a) Usamos que $\dim(\mathbb{R}) = 1$ **(0.5 pts.)**, $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(\mathbb{R})$, pues $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}$ **(0.5 pts.)**, y el Teorema Núcleo-Imagen **(0.5 pts.)** para deducir que $1 = \dim(\mathbb{R}) \geq \dim(\mathrm{Im}(T)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(T)) \geq 1$, por la hipótesis $\mathrm{Ker}(T) \neq V$ **(0.5 pts.)**. De aquí se obtiene que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$, por lo que T es epiyectiva **(0.5 pts.)** y que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n - 1$ **(0.5 pts.)**

(b) Por hipótesis $\mathrm{Ker}(T) \neq V$ lo que implica que existe $v_0 \in V \setminus \mathrm{Ker}(T)$, es decir, tal que $T(v_0) \neq 0$ **(0.5 pts.)**. Un elemento u en $U = \langle \{v_0\} \rangle$, se expresa como $u = \lambda v_0$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ **(0.5 pts.)**. Por linealidad de T, $T(u) = T(\lambda v_0) = \lambda T(v_0)$ **(0.5 pts.)**. Si además $u \in \mathrm{Ker}(T)$, entonces $T(u) = \lambda T(v_0) = 0$, por lo que $\lambda = 0$, ya que $T(V_0) \neq 0$ **(0.5 pts.)**. Esto muestra que $U \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Para concluir que $U \oplus \mathrm{Ker}(T) = V$, basta con demostrar que $U + \mathrm{Ker}(T) = V$.

Como $U \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, se tiene que

$$\dim(U + \mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(U) = n - 1 + 1 = n = \dim(V), \textbf{(0.5 pts.)}$$

lo que muestra lo pedido, ya que $U + \mathrm{Ker}(T) \subseteq V$ **(0.5 pts.)**.

Tiempo del control 3 horas.