Control 2 - Primavera 2025

P1. *a)* Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Para cada una de las siguientes proposiciones, determine si es verdadera (mediante una demostración) o falsa (proporcionando un contraejemplo).

1) (1.5 pts.) $\forall A' \subseteq A, f((A')^c) = (f(A'))^c$.
2) (1.5 pts.) $\forall B' \subseteq B, f^{-1}((B')^c) = (f^{-1}(B'))^c$.

b) (3.0 pts.) Calcule

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}(2^j - 3^j).$$

Solución:

a) 1) La proposición es falsa. Existen numerosos ejemplos, algunos de los más generales siendo:

- Una función que no sea sobreyectiva, por ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$. Luego, se puede tomar por ejemplo $A' = \{0\}$, se tiene que $f(A') = \{0\}$, $f((A')^c) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $(f(A'))^c = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y se tiene claramente que la proposición es falsa.
- Cualquier función f y $A' \subseteq A$ que verifique $f(A') \cap f((A')^c) \neq \emptyset$. Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ y $f : A \longrightarrow B$ la función dada por $f(a) = 1$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$. Luego, si tomamos $A' = \{a\}$, se tiene que $f((A')^c) = f(\{b, c\}) = B$ y $(f(A'))^c = \{2\}$.

[**(0.5 pts) por proponer una función especificando dominio, codominio y grafo. (1.0 pts) por mostrar que la función propuesta no cumple con la proposición del enunciado. La función propuesta también puede ser descrita con un diagrama si se trata de una función definida en conjuntos finitos.**]

2) La proposición es verdadera. En efecto, consideremos $B' \subseteq B$ arbitrario. Luego

$$\begin{aligned} f^{-1}((B')^c) &= \{x \in A,\ f(x) \in (B')^c\} && (1)\\ &= \{x \in A,\ f(x) \notin B'\} \\ &= (\{x \in A,\ f(x) \in B'\})^c && (2)\\ &= (f^{-1}(B'))^c. && (3)\end{aligned}$$

[**0.5 pts por escribir correctamente $f^{-1}((B')^c)$ (línea (1)), 0.5 pts por identificar este conjunto como el complemento de otro conjunto (línea (2)) , 0.5 pts por concluir que este otro conjunto corresponde a $f^{-1}(B')$. (línea (3))**]

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}(2^j-3^j) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}(2^j-3^j)\mathbf{1}_{k\geq j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^j-3^j)\mathbf{1}_{k\geq j} \quad (4)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}(2^j-3^j)\mathbf{1}_{k\geq j} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}(2^j-3^j) \quad (5)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}2^j-\sum_{j=0}^{k}3^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2^{k+1}-1}{2-1}-\frac{3^{k+1}-1}{3-1}\right) \quad (6)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k-\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}-\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k1^{n-k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} \\
&= 2\cdot 3^n-\frac{3}{2}\cdot 4^n-2^{n-1} \quad (7)
\end{aligned}$$

[**0.5 pts por aplicar correctamente la indicatriz y completar la suma interna para que los índices sean independientes (hasta línea** (4)**). 0.5 por invertir la suma y modificar los índices para deshacerse de la indicatriz (hasta línea** (5)**). 1 pto por aplicar correctamente las sumas geométricas (hasta línea** (6)**). 1 pto por utilizar binomio de Newton y concluir el valor de la suma (hasta línea** (7)**).**]

Indicaciones para la corrección: Hice el desarrollo de la suma con todos los detalles posibles. Los estudiantes pueden saltarse pasos mientras los pasos principales de la distribución del puntaje sean claros. Los estudiantes puede utilizar como conocidas las sumas

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(x+1)^n.$$

La indicatriz puede ser denotada por $\mathbf{1}_{k\geq j}, \mathbb{1}_{k\geq j}, [k\geq j]$, o $[[k\geq j]]$.

P2. a) (2.0 pts.) Dibuje el digrafo de una relación de equivalencia en $\{1,2,3,4,5,6\}$, cuyo conjunto cuociente es

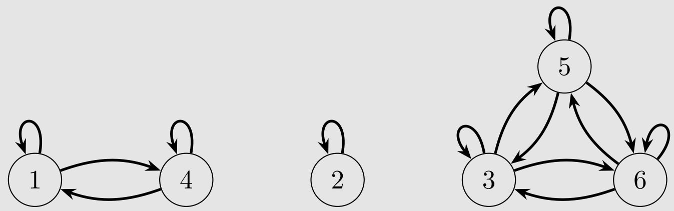
$$\{\{1,4\},\{2\},\{3,5,6\}\}.$$

b) (2.0 pts.) Demuestre que la relación R en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por xRy si y sólo si $y/x\geq 1$ y $y/x\in\mathbb{Q}$ es de orden y determine si es un orden total.

c) (2.0 pts.) Demuestre que la relación S en $\mathbb{R}$ dada por xSy si y sólo si $y-x\in\mathbb{Q}$ es de equivalencia. Además determine la clase de equivalencia de 0 y demuestre que la clase de $\sqrt{2}$ y la de $\sqrt{2}+1/2$ coinciden.

Solución:

a) **[Dar 0.1pts. por cada arco (1.4pts en total), 0.2pts por poner vértices 1 y 4 juntos, 0.2pts. por dejar vértice 2 solo, y 0.2pts. por poner vértices 3, 5 y 6 juntos.]**



b) Para facilitar la notación, observemos que xRy si se cumplen dos proposiciones, así que llamaremos a la proposición $y/x \geq 1$ como *primera propiedad* y a $y/x \in \mathbb{Q}$ *segunda propiedad*.

- **Refleja:** Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrario. Tenemos que $x/x \geq 1$ y $x/x = 1 \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que xRx, es decir, R es refleja. [**0.5pts.**]
- **Antisimétrica:** Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrarios t.q. $xRy \wedge yRx$. Entonces, de la primera propiedad tenemos que $y/x \geq 1$ y $x/y \geq 1$, lo cual implica que $x = y$ y por tanto R es antisimétrica. [**0.5pts.**]
- **Transitiva:** Sean $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arbitrarios t.q. $xRy \wedge yRz$. Entonces tenemos que $y/x \geq 1$ y $z/y \geq 1$, lo cual implica que $z/x = (z/x)(y/y) = (y/x)(z/y) \geq (1)(1) = 1$, así que la primera propiedad se cumple para x, z. La segunda propiedad se cumple ya que tanto y/x como z/y están en $\mathbb{Q}$, y entonces su producto también está en $\mathbb{Q}$, es decir, $z/x = (z/x)(y/y) = (y/x)(z/y) \in \mathbb{Q}$. Como las dos propiedades se cumplen, tenemos que xRz, y por tanto R es transitiva. [**0.5pts.**]

  Como la relación es refleja, antisimétrica y transitiva, tenemos que R es de orden.
- R <u>no</u> es de orden total. Para $x = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y para $y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que $\sqrt{2}/1 \notin \mathbb{Q}$ y $1/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ lo que implica que $1 \not R \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} \not R 1$. [**0.5pts. Cualquier otro ejemplo que muestre que $x \not R y$ y $y \not R x$ es válido.**]

c)
- **Refleja:** Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Tenemos que $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que xSx, es decir, S es refleja. [**0.25pts.**]
- **Simétrica:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios t.q. xSy. Entonces, tenemos que $y - x \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que $x - y \in \mathbb{Q}$ y por tanto S es simétrica. [**0.25pts.**]
- **Transitiva:** Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitrarios t.q. $xSy \wedge ySz$. Entonces, tenemos que $y - x \in \mathbb{Q}$ y $z - y \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que $z - x = (z - x) + y - y = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{Q}$ porque la suma de número racionales es racional. Así, tenemos que xSz y por lo tanto S es transitiva. [**0.5pts.**]

  Como la relación es refleja, simétrica y transitiva, tenemos que S es de equivalencia.
- Por definición de clase de equivalencia, tenemos que

$$[0]_S = \{y \in \mathbb{R} \mid 0Sy\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y - 0 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}. \qquad \textbf{[0.5pts.]}$$

- Como S es de equivalencia, basta mostrar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2} + 1/2$ están relacionados, lo cual se cumple ya que
  <u>Opción 1:</u> $(\sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1/2) = -1/2 \in \mathbb{Q}$.
  <u>Opción 2:</u> $(\sqrt{2} + 1/2) - (\sqrt{2}) = 1/2 \in \mathbb{Q}$. [**0.5pts. cualquier opción**]

Indicaciones para la corrección: Para el digrafo en (a), pueden poner el digrafo de cualquier forma, sólo hay que verificar que sea "equivalente".

La notación de (b) sobre primera y segunda propiedad no es necesaria que la definan los estudiantes.

P3. *a*) (1.5 pts.) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^4 - i^4 = (n+1)^4 - 1.$$

b) (1.5 pts.) Sin usar inducción, dé una demostración de la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n(n+1))^2/4.$$

Indicación: Puede usar las fórmulas conocidas de las sumatorias $\sum_{i=1}^{n} i$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2$, y la parte anterior.

c) (3.0 pts.) Sea A un conjunto finito y C un subconjunto de A. Use las herramientas conocidas de cardinales finitos para calcular el cardinal del conjunto E dado por

$$E = \{(a,a') \in A \times A \mid a \notin C \vee a' \notin C\}.$$

Solución:

a) Definiendo $a_i = i^4$ y utilizando la propiedad telescópica tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^4 - i^4 = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1 = (n+1)^4 - 1.$$

[**Otorgar 1.5 pts. por aplicar correctamente la propiedad telescópica.**]

b) Gracias al binomio de Newton, tenemos que

$$(i+1)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} i^k = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} i + \binom{4}{2} i^2 + \binom{4}{3} i^3 + \binom{4}{4} i^4.$$

de donde

$$\binom{4}{0} = 1, \ \binom{4}{1} = 4, \ \binom{4}{2} = 6, \ \binom{4}{3} = 4, \ \binom{4}{4} = 1.$$

[**Otorgar 0.1 pts. por cada coeficiente binomial correcto.**]

Así, obtenemos la igualdad

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

De la parte anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1 &= \sum_{i=1}^{n}(i+1)^4 - i^4 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[4 \cdot i^3 + 6 \cdot i^2 + 4 \cdot i + 1] \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n,
\end{aligned}$$

por lo que

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

[**Otorgar 0.5 pts. por dessarrollo correcto.**]

Opción 1. Notemos que

$$\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\
&= (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] \\
&= (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+2) - (n+1)] \\
&= (n+1)^2[(n+1)^2 - 2n - 1] \\
&= (n+1)^2[n^2 + 2n + 1 - 2n - 1] \\
&= (n+1)^2 n^2
\end{aligned}$$

Opción 2. Notemos que

$$\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\
&= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - (n^2+n)(2n+1) - 2n^2 - 2n - n \\
&= n^4 + 4n^3 + 4n^2 + n - 2n^3 - n^2 - 2n^2 - n \\
&= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
&= n^2(n^2 + 2n + 1) \\
&= n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

[**Otorgar 0.5 pts. por dessarrollo correcto.**]

c) Opción 1. Notemos que $E^c = \{(a,a') \in A \times A \colon a \in C \wedge a' \in C\}$ y este último conjunto es igual a $C \times C$, [**Otorgar 1 pt. por notar la igualdad.**] por lo que $|E^c| = |C \times C| = |C|^2$. [**Otorgar 1 pt. por cardinal de producto cartesiano.**]

Concluimos entonces que

$$|E| = |A \times A| - |E^c| = |A|^2 - |C|^2.$$

[**Otorgar 1 pt. por cardinal de la diferencia entre conjuntos finitos.**]

Opción 2. Definamos los conjuntos $B = \{(a,a') \in A \times A \colon a \notin C\}$ y $D = \{(a,a') \in A \times A \colon a \in C \wedge a' \notin C\}$. Probaremos que $E = B \cup D$ y $B \cap D = \emptyset$. En efecto,

- Supongamos que $(a,a') \in E$, entonces $a \notin C \ \wedge a' \notin C$. Si $a \notin C$, entonces $(a,a') \in B$. Si $a \in C$, entonces debe ocurrir que $a' \notin C$, por lo que $(a,a') \in D$. [**Otorgar 0.4 pts por demostrar esta inclusión.**]
- Supongamos que $(a,a') \in B \cup D$. Si $(a,a') \in B$, entonces $a \notin C$, por lo que $(a,a') \in E$. Si $(a,a') \in D$, entonces $a \in C$ y $a' \notin C$, por lo que también $(a,a') \in E$. [**Otorgar 0.4 pts por demostrar esta inclusión.**]
- Supongamos que $(a,a') \in B \cap D$. Entonces $a \notin C$ y además $a \in C$ y $a \notin C$, lo que es una contradicción. De esta manera $B \cap D = \emptyset$. [**Otorgar 0.2 pts por probar que los conjuntos son disjuntos.**]

Como la unión es disjunta, tenemos que $|E| = |B| + |D|$. [**Otorgar 0.3 pts. por cardinal de unión de conjuntos disjuntos.**]

Para calcular $|B|$, podemos notar que $B = C^c \times A$, [**Otorgar 0.3 pts. por notar la igualdad.**] por lo que

$$|B| = |C^c| \cdot |A| = (|A| - |C|) \cdot |A|.$$

[**Otorgar 0.4 pts. por cardinal de producto cartesiano.**] Ahora, para calcular $|D|$, podemos notar que $D = \{(a, a') \in A \times A \colon a \in C \wedge a' \in C^c\}$ y este último conjunto es igual a $C \times C^c$ [**Otorgar 0.3 pts. por cardinal de unión de conjuntos disjuntos.**], por lo que $|D| = |C| \cdot |C^c| = |C| \cdot (|A| - |C|)$. [**Otorgar 0.4 pts. por cardinal de producto cartesiano.**]

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} |E| &= |B| + |D| \\ &= (|A| - |C|)(|A| + |C|) \\ &= |A|^2 - |C|^2. \end{aligned}$$

[**Otorgar 0.3 pts. por desarrollo correcto.**]

Indicaciones para la corrección: En la parte (a) se explicita la sucesión para aplicar la propiedad telescópica. No es necesario que los estudiantes lo hagan, sino únicamente que apliquen correctamente dicha propiedad.

En la parte (b) se colocan dos opciones para poder llegar al resultado final, aunque pueden haber varias maneras por parte de los estudiantes. Si el desarrollo del estudiante es correcto se les otorga 0.5 pts.

En la parte (c) es posible que los estudiantes escriban C^2 en vez de $C \times C$ para referirse al producto cartesiano.

Tiempo: 3.0 hrs.