Control 2

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 18 Jumio 2021

Profesor de cátedra: Pablo Ugalde Salas
Profesora auxiliar: Cynthia Vega

P1

a) Demuestre o refute con un contraejemplo las siguientes afirmaciones **[1 pto c/u]**:

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente entonces dado $a \in \mathbb{R}$ la función definida por $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es convexa.

   Verdadero: Notar que $G'(x) = f(x)$ por TFC, y luego $G''(x) = f'(x) > 0$ por hipótesis, luego G es convexa.

2) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces el área entre la curva definida por la función f y el eje x entre a y b viene dada por $\int_a^b f(x)dx$.

   Falso: considere $f(x) = x$ entre $[-1, 1]$, la integral es 0. El área viene dada por $\int_a^b |f(x)|dx$.

3) Si f es continua en $[a, b]$ y $\displaystyle\int_a^b f(x) = 0$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

   Verdadero: Aplicar Teorema del valor medio y luego se tiene que existe un $c \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x) = f(c)(b - a) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y defina $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $G(x) = \int_0^x f(t^2)dt$. Demuestre que $\int_0^u G(x)dx = uG(u) - \frac{1}{2}F(u^2)$. **[3 ptos.]**

R: Consiste en aplicar integración por partes y luego cambio de variable:

$$\int_0^u G(x)dx = \int_0^u \int_0^x f(t^2)dtdx = x\int_0^x f(t^2)dt\Big|_0^u - \int_0^u G'(x)x \tag{1}$$

$$= uG(u) - 0G(0) - \int_0^u f(x^2)xdx \quad |h = x^2 \Rightarrow dh = 2xdx \tag{2}$$

$$= uG(u) - \frac{1}{2}\int_0^{u^2} f(h)dh \tag{3}$$

$$= uG(u) - \frac{1}{2}F(u^2) \tag{4}$$

Asignar 1 pto por integrar por partes. 0.5 pto por aplicar TFC sobre G(x). 1 pto por el cambio de variable y remplazar bien los límites de integración. 0.5 ptos por reconocer $F(u^2)$ en la expresión final.

P2

a) Demuestre que el volumen de un cono con base circular de radio r y altura h viene dado por $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$ **[2 pts]**. **Indicación:** *Puede modelar el problema como la rotación de una recta en torno a un eje.*

R: Se puede hacer utilizando la fórmula de un sólido de revolución creado por la recta $y = \frac{r}{h}x$ en torno al eje x, entre 0 y h. Es decir calcular:

$$
\begin{aligned}
\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \quad & (5)\\
= \pi \left.\frac{r^2x^3}{3h^2}\right|_0^h \quad & (6)\\
= \pi \frac{r^2h^3}{h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad & (7)
\end{aligned}
$$

1 punto por plantear el problema, 1 punto por resolver la integral.

b) Calcule la longitud de la curva entre -1 y 1 de la función $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ en función de a. **[2 pts]**. **Nota pedagógica:** La función f modela la forma de una cuerda suspendida entre dos puntos (catenaria).

R: Hay que calcular $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$. Notando que $a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \quad & (8)\\
\int_{-1}^1 \sqrt{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \quad & (9)\\
\int_{-1}^1 \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad & (10)\\
a\sinh\left.\left(\frac{x}{a}\right)\right|_{-1}^1 \quad & (11)\\
= a\sinh\left(\frac{-1}{a}\right) - a\sinh\left(\frac{1}{a}\right) \quad & (12)\\
= 2\sinh\left(\frac{1}{a}\right) \quad & (13)
\end{aligned}
$$

Asignar 0.5 pto por plantear la integral de longitud de curva. 0.5 punto por calcular la derivada de $\cosh(x)$, 0.5 pto por aplicar la identidad $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$. 0.5 puntos por los cálculos finales, si llega a (12) se considera correcto.

c) Calcule el area comprendida entre las curvas $f(x) = \sqrt{1 + 2x^2}$ y $g(x) = 1 + x$. **[2 pts]**.

R: Primero hay que calcular los puntos de intersección de las curvas [0.2 pts]:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1 + 2x^2} = 1 + x \quad & (14)\\
&1 + 2x^2 = 1 + 2x + x^2 \quad & (15)\\
&x^2 - 2x = 0 \quad & (16)\\
&x = 0 \vee x = 2. \quad & (17)
\end{aligned}
$$

Enseguida hay que notar que si $0 < x < 2$ entonces $2x > x^2$, luego $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x^2$ y por lo tanto $g(x) > f(x)$ Entonces hay que calcular $\int_0^2 g(x) - f(x)$ [0.3 pts].

$$
\int_0^2 g(x)dx = \left.\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 = 4. \quad (18)
$$

[0.5 ptos].

Finalmente queda la integral más difícil $\int_0^2 \sqrt{1+2x^2}dx$ aquí se resuelve usando el CV de $u = \sinh^{-1}(\sqrt{2}x)$ y luego $du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x^2}}$ y $\sqrt{2}x = \sinh(u)$. También se puede resolver con $u = \arctan(\sqrt{2}x)$.

$$\int_0^2 \sqrt{1+2x^2}dx \tag{19}$$

$$= \int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sinh^2(u))du \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2\sqrt{2}) + \int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh^2(u))du \tag{21}$$

[0.5 pts.] Para resolver $\displaystyle\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh^2(u))du$ se hace integración por partes:

$$\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \sinh^2(u)du = \sinh(u)\cosh(u)|_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} - \int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \cosh^2(u)du \tag{22}$$

$$\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \sinh^2(u)du = \sinh(u)\cosh(u)|_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} - \int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} (1+\sinh^2(u))du \tag{23}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \sinh^2(u)du = \sinh(u)\cosh(u)|_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} - \sinh^{-1}(2\sqrt{2}) \tag{24}$$

$$2\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \sinh^2(u)du = 2\sqrt{2}\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} - \sinh^{-1}(2\sqrt{2}) \tag{25}$$

$$\int_0^{\sinh^{-1}(2\sqrt{2})} \sinh^2(u)du = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sinh^{-1}(2\sqrt{2}) \tag{26}$$

[0.4 ptos] Y así el área entre las curvas viene dada por $4-(3+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2\sqrt{2})) = 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2\sqrt{2})$
[0.1 ptos]