Pauta de corrección Control 2

P1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Respecto a f

a) **(1 pt.)** Encuentre su dominio

b) **(1 pt.)** Decida si es par o impar o ninguna de las anteriores

c) **(2 pts.)** Demuestre que la función es estrictamente creciente en $[0,1]$ y es estrictamente decreciente en $[-1,0]$.

d) **(2 pts.)** Encuentre el conjunto más grande $B \subset [0,\infty[$ (respecto a la contención de conjuntos) para el cual $f\colon B \to f(B)$ es biyectiva y encuentre en forma explícita $f^{-1}(x)$

Solución

a) Necesitamos que

$$1 - x^2 \geq 0$$

(0,4 pts. Por plantear la ecuación)

Se deduce que $-1 \leq x \leq 1$, por lo tanto el dominio de f es $[-1,1]$ **(0,6 pts. Por concluir)**

b)

$$f(-x) = |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

Concluimos que f es par.

(0,5 pts.)

Además

$$f(-x) = |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2} \neq -f(x) = -|x| + \sqrt{1-x^2}$$

Concluimos que f no es impar.

(0,5 pts.)

c) Monotonía

$$f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

En [0,1]:

Sea $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Entonces $x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2$. Como $\sqrt{t}$ es estrictamente creciente, se tiene $\sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2}$. Además, en $[0,1]$ vale $|x| = x$, por lo tanto:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) - \left(\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2}\right)$$

El primer término es positivo y el segundo negativo, de modo que $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Por tanto f es estrictamente creciente en $[0,1]$

(1 pt.)

En $[-1,0]$:

Sea $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 0$. Entonces $|x_1| = -x_1 > -x_2 = |x_2|$, así que $|x_1| > |x_2|$. Esto implica $x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow 1 - x_1^2 < 1 - x_2^2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1^2} < \sqrt{1-x_2^2}$.

Luego:

$$f(x_1) - f(x_2) = (|x_1| - |x_2|) - (\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2})$$

El primer paréntesis es positivo y el segundo negativo, entonces $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Así: f es estrictamente decreciente en $[-1,0]$.

(1 pt.)

d) Mostremos que el conjunto solicitado es $B = [0,1]$. Debemos mostrar que f es biyectiva en B y que de entre todos los subconjuntos de $[0,\infty)$ es el conjunto más grande para el cual f es es biyectiva.

- Mostremos que f es biyectiva en $[0,1]$.
  Primero necesitamos encontrar $f(B)$. Para ello recordemos que por definición:

  $$f(B) = \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \{\, x - \sqrt{1-x^2} \mid x \in [0,1] \,\}.$$

  1. Mostremos que $f(B) \subset [-1,1]$.
  Para todo $x \in [0,1]$ se tiene $0 \leq x \leq 1$, luego:

  $$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

  Entonces:

  $$f(x) = x - \sqrt{1-x^2} \geq x - 1 \geq -1,$$

  y también:

  $$f(x) = x - \sqrt{1-x^2} \leq x \leq 1.$$

  De modo que:

  $$-1 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

  Por lo tanto:

  $$f(B) \subset [-1,1].$$

  (0,5 pt.) 2. Mostremos que $[-1,1] \subset f(B)$.
  Sea $y \in [-1,1]$. Debemos probar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$.
  Partimos de la ecuación:

  $$y = x - \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0,1].$$

  Aislamos la raíz:

  $$\sqrt{1-x^2} = x - y.$$

  El lado derecho es no negativo porque $x \geq 0$ y $y \leq 1$.
  Elevamos al cuadrado:

  $$1 - x^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2,$$

  y simplificamos:

  $$2x^2 - 2xy + (y^2 - 1) = 0.$$

  Resolvemos en x:

  $$x = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2}.$$

  Para $y \in [-1,1]$, el valor bajo la raíz cumple $2 - y^2 \geq 1 > 0$, por lo que la expresión es real. Además, el valor

  $$x = \frac{y + \sqrt{2-y^2}}{2}$$

  pertenece a $[0,1]$ (pues $y + \sqrt{2-y^2}$ está entre 0 y 2).
  Por lo tanto, para todo $y \in [-1,1]$ existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$.
  Luego:

  $$[-1,1] \subset f(B).$$

  (0,5 pt. segunda contención)

  3. Conclusión:

  $$f(B) = [-1,1].$$

- Notamos que claramente $B = [0,1] \subset [0,\infty)$ y por lo probado anteriormente f es biyectiva allí. Además $[0,1]$ es el subconjunto del dominio de f más grande que está contenido en $[0,\infty)$. Por lo tanto $B = [0,1]$ es el conjunto más grande dentro de los subconjuntos de $[0,\infty)$ para el cual f es biyectiva.

  (0,5 pt. mostrar que B es el conjunto más grande)

Para hallar f^{-1}, sea $y = f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, con $x \in [0,1]$. Entonces:

$$\sqrt{1-x^2} = x - y \quad \text{(positivo en } [0,1])$$

Elevamos al cuadrado:

$$1 - x^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Reordenamos:

$$2x^2 - 2xy + (y^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - xy + \frac{y^2-1}{2} = 0$$

Aplicamos la fórmula cuadrática en x:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2}$$

Como $x \in [0,1]$, tomamos el signo positivo. Por tanto:

$$f^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{2-y^2}}{2}, \quad y \in [-1,1]$$

(0,5 pt. formula para f^{-1})

P2. a) El paralelogramo $ABCD$ de la figura tiene perímetro $2p$ y su diagonal mide d (con $p > d$). El ángulo $\angle ABC$ lo denotaremos por α (con $0 < \alpha < \pi$).

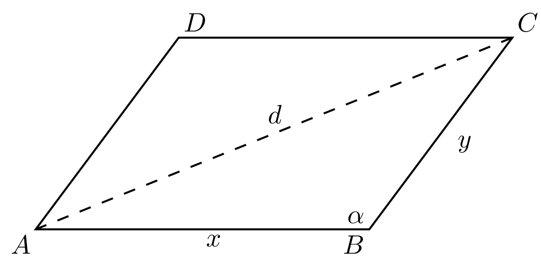


Figura 1: Paralelogramo $ABCD$

i) **(2 pts.)** Denotando por x e y las longitudes de los lados AB y BC respectivamente, muestre que el área A del paralelogramo está dado por

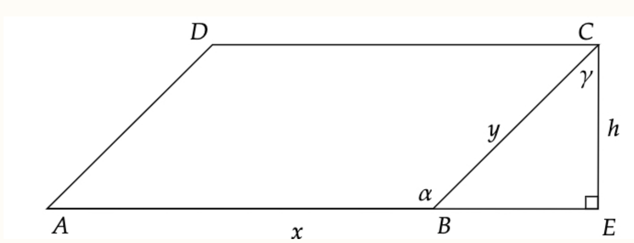
$$A = xy \sin\alpha$$

ii) **(2 pts.)** Deducir que

$$A = \frac{p^2 - d^2}{2} \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Solución

i) El área del paralelogramo corresponde a la suma de las áreas del $\triangle ABC$ y del $\triangle ADC$. Ambas áreas son iguales, dado que $ABCD$ es un paralelogramo y AC es la diagonal. Para encontrar el área del $\triangle ABC$ trazamos la altura desde C hacia la extensión del trazo AB, el punto de intersección lo denotaremos por E. Además denotamos por h a dicha altura, junto con γ al $\angle BCE$. De esta forma $\frac{A}{2} = \frac{xh}{2}$.



Para encontrar h notamos que

$$\cos\gamma = \frac{h}{y}$$

(1 pt.)

además $\gamma + \pi = \alpha$, por lo que

$$h = y\cos\gamma = y\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = y\sin\alpha$$

donde hemos usado la fórmula del coseno de la suma. En definitiva

$$A = xh = xy\sin\alpha$$

(1 pt. mostrar que B es el conjunto más grande)

ii) Del perímetro $2p$ se tiene $x + y = p$. Luego, en el $\triangle ABC$ usamos el teorema del coseno:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

(0,8 pt.)

Pero $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = p^2$, luego, restando ambas expresiones se llega

$$p^2 - d^2 = 4xy(1 + \cos\alpha)$$

(0,8 pt.)

por lo que

$$xy = \frac{p^2 - d^2}{2(1 + \cos\alpha)}$$

(0,4 pt.)

Sustituyendo en la expresión del área concluimos que

$$A = \frac{p^2 - d^2}{2}\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

b) **(2 pts.)** Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

Solución

Partimos de la ecuación:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1.$$

Usamos la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, de modo que:

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

El signo depende del cuadrante: si $\sin x \geq 0$ (es decir, $x \in [0, \pi]$), usamos el signo positivo. Si $\sin x \leq 0$ (es decir, $x \in [\pi, 2\pi]$), usamos el signo negativo.

Caso 1: $\sin x = +\sqrt{1 - \cos^2 x}$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1.$$

Sea $t = \cos x$, con $t \in [-1, 1]$:

$$\sqrt{3}t + \sqrt{1 - t^2} = 1.$$

Aislamos la raíz:

$$\sqrt{1 - t^2} = 1 - \sqrt{3}t.$$

Elevamos al cuadrado:

$$1 - t^2 = 1 - 2\sqrt{3}t + 3t^2,$$

$$4t^2 - 2\sqrt{3}t = 0,$$

$$t(2t - \sqrt{3}) = 0.$$

De donde:

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(0,4 pt.)

Volviendo a x, vemos que

- Si $t = 0$, entonces $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.
- Si $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin x = \frac{1}{2}$, es decir $x = \frac{\pi}{6}$.

La presencia de raíces cuadradas nos obliga a verificamos en la ecuación original:

$$\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq 1.$$

Por lo tanto, sólo $x = \frac{\pi}{2}$ es solución válida en este caso.

(0,4 pt.)

Caso 2: $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$
Sustituyendo:

$$\sqrt{3}\cos x - \sqrt{1-\cos^2 x} = 1.$$

Sea $t = \cos x$:

$$\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2} = 1.$$

Aislamos la raíz:

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{3}t - 1.$$

Elevamos al cuadrado:

$$1 - t^2 = 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1,$$
$$4t^2 - 2\sqrt{3}t = 0,$$
$$t(2t - \sqrt{3}) = 0.$$

De donde nuevamente:

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(0,4 pt.)

Como ahora $\sin x < 0$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ corresponde a $x = -\frac{\pi}{6}$ (cuarto cuadrante). Si $t = 0$, entonces $\cos x = 0$ y $\sin x = -1$, lo que no cumple la ecuación.
Por tanto, en este caso:

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

(0,4 pt.)

Conclusión: Al considerar ambos signos de $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, obtenemos todas las soluciones:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(0,5 pt. por sumar $2k\pi$ en cada solución)

P3. a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Sea $\lambda < 0$. Definamos

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

i) **(1 pts.)** Muestre que λA tiene ínfimo
ii) **(2 pts.)** Muestre que $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$

Solución

i) Usaremos el axioma del supremo adaptado al ínfimo, es decir mostremos que $\lambda A \neq \emptyset$ y que λA es acotado inferiormente.

- $\lambda A \neq \emptyset$.

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \Rightarrow \lambda a \in \lambda A \Rightarrow \lambda A \neq \emptyset$$

(0,5 pt.)

- λA es acotado inferiormente. Dado que A es acotado sumeriormente se tiene que

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(a \leq K)$$

dado que $\lambda < 0$ se tiene que

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(\lambda K \leq \lambda a)$$

esto dice que λK es una cota inferior de λA y por tanto λA es acotado inferiormente.

(0,5 pt.)

ii) Primero notamos que $\sup A$ existe, pues A es no vacío y acotado superiormente.

(0,5 pt.)

Para mostrar que $\inf \lambda A = \lambda \sup A$ usaremos la caracterización ϵ del ínfimo, es decir mostraremos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \lambda a \in \lambda A)(\lambda \sup A + \epsilon > \lambda a)$$

Sea $\epsilon > 0$. Usamos la caracterización del supremo para A con $-\frac{\epsilon}{\lambda} > 0$. Dado que $\sup A$ es el supremo de A se tiene que

$$(\exists a \in A)\left(\sup A - \left(-\frac{\epsilon}{\lambda}\right) < a\right)$$

(0,8 pt.)

pero

$$\sup A - \left(-\frac{\epsilon}{\lambda}\right) < a \Rightarrow \lambda \sup A + \epsilon > \lambda a$$

lo cual es exactamente lo que queríamos **(0,7 pt.)**

b) **(3 pts.)** Encuentre el supremo y el ínfimo (si es que existen) del conjunto

$$A = \left\{\frac{m}{|m| + n} : m, n \in \mathbb{Z}, \quad n > 0\right\}$$

Solución

- Mostremos que A es no vacío. En efecto tomando $n = 1$ y $m = 0$ se llega a que $\frac{0}{0+1} = 0 \in A$.

(0,2 pts.)

- Mostremos que A es acotado superiormente. Si $m > 0$, entonces $|m| = m$ y como $n > 0$, se cumple $m+n > |m|$. Por tanto

$$\frac{m}{|m| + n} = \frac{m}{m + n} < 1.$$

Si $m \leq 0$, $\frac{m}{|m|+n} \leq 0 \leq 1$. En consecuencia, 1 es una cota superior de A, y por lo tanto A está acotado superiormente.

(0,4 pts.)

- Mostremos que $\sup A$ existe. Se tiene que A es no vacío y acotado superiormente, gracias al axioma del supremo $\sup A$ existe.

(0,3 pts.)

- Mostremos que A está acotado inferiormente. si $m < 0$, $|m| = -m$ y $|m| + n > -m$, luego

$$\frac{m}{|m| + n} > \frac{m}{|m|} = -1.$$

Si $m \geq 0$, $\frac{m}{|m|+n} \geq 0 \geq -1$. Así, -1 es una cota inferior de A.

(0,4 pts.)

- Mostremos que $\inf A$ existe. Se tiene que A es no vacío y acotado inferiormente, gracias al axioma del supremo adaptado al ínfimo se tiene que $\inf A$ existe.

(0,3 pts.)

- Calculemos $\sup A$. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos mostrar que existe un elemento de A mayor que $1-\varepsilon$. Tomemos $n = 1$ y $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \geq 1/\varepsilon$, (la existencia de este m está garantizada gracias al Principio de Arquímides).

  (0,4 pts.)

  Entonces

$$\frac{m}{|m|+n} = \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} > 1 - \frac{1}{m} \geq 1 - \varepsilon.$$

  Por lo tanto, ningún número menor que 1 puede ser cota superior, es decir

$$\sup A = 1.$$

  (0,3 pts.)

- Calculemos $\inf A$. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos mostrar que existe un elemento de A menor que $-1+\varepsilon$. Tomemos $n = 1$ y $m = -k$ con $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1/\varepsilon$, (la existencia de este m está garantizada gracias al Principio de Arquimides)

  (0,4 pts.)

  Entonces

$$\frac{m}{|m|+n} = \frac{-k}{k+1} = -1 + \frac{1}{k+1} < -1 + \varepsilon.$$

  Por lo tanto, ningún número mayor que -1 puede ser cota inferior, es decir

$$\text{ínf}\, A = -1.$$

  (0,3 pts.)