Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2025-2

Pauta de corrección Control 1

P1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{|x|^3 + 1}.$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' allí, y encuentre todos los puntos críticos de f.

Solución

Veremos que f es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Para $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tenemos dos formas de analizar la situación.

Primera forma: análisis de f primero en $(-\infty, 0)$ y luego en $(0, \infty)$

En efecto, $f(x)$ coincide con $\dfrac{1}{-x^3+1}$ si $x \in (-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por notar que f coincide con $\dfrac{1}{-x^3+1}$ en $(-\infty, 0)$)

Como esta es una función racional, es derivable en todo punto de su dominio.

(0,1 pts. por justificar que $\dfrac{1}{-x^3+1}$ es derivable)

Así, f es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in (-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por concluir que f es derivable en $(-\infty, 0)$)

La derivada aquí es:

$$f'(x) = -\frac{-3x^2}{(-x^3+1)^2} = \frac{3x^2}{(-x^3+1)^2}.$$

(0,1 pts. por calcular la derivada en $(-\infty, 0)$)

Ahora, $f(x)$ coincide con $\dfrac{1}{x^3+1}$ si $x \in (0, +\infty)$.

(0,1 pts. por notar que f coincide con $\dfrac{1}{x^3+1}$ en $(0, +\infty)$)

Como esta es una función racional, es derivable en todo punto de su dominio.

(0,1 pts. por justificar que $\dfrac{1}{x^3+1}$ es derivable)

Así, f es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in (0, +\infty)$.

(0,1 pts. por concluir que f es derivable en $(0, +\infty)$)

La derivada aquí es:

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}.$$

(0,1 pts. por calcular la derivada en $(0, +\infty)$)

Segunda forma: análisis de f en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Notamos que la función $f(x) = \frac{1}{|x|^3+1}$ es una composición con la función valor absoluto $g(x) = |x|$, ésta última es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De esta forma se deduce que f es una función diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **(0,6 pts. por justificar que f es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)**
Sabemos que la derivada de la función valor absoluto se puede escribir de varias formas, por ejemplo

$$g'(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x)$$

donde arriba $\operatorname{sgn}(x)$ corresponde a la función signo, la cual se define mediante

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

de esta forma, al usar la regla del cociente y de la cadena llegamos a que también f' se puede escribir de varias formas, obviamente todas equivalentes entre sí, por ejemplo

$$f'(x) = \frac{-3x^2 \operatorname{sgn}(x)}{(|x|^3+1)^2} = -\frac{3x|x|}{(|x|^3+1)^2} = -\frac{3|x|^2}{(|x|^3+1)^2}\frac{x}{|x|}$$

por lo descrito anteriormente, lo de arriba es válido para $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
(0,2 pts. Por entregar la expresión de f' en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Falta ver que f es derivable en $\bar{x} = 0$.
Podemos calcular los límites laterales (usando varios métodos posibles), o calcular el límite directamente:

Primera forma de calcular el límite lateral izquierdo (límites conocidos)

Se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{-x^3+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^3}{-x^3+1}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{-x^3+1} = \frac{0^2}{-0^3+1} = 0.$$

(0,2 pts. por calcular el límite)

En este cálculo, usamos la continuidad de la función $\dfrac{x^2}{-x^3+1}$ en $\bar{x} = 0$.
(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Segunda forma de calcular el límite lateral izquierdo (regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{-x^3+1} - 1}{x} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{3x^2}{(-x^3+1)^2}}{1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2}{(-x^3+1)^2} = \frac{3 \cdot 0^2}{(-0+1)^2} = 0.$$

(0,1 pts. por calcular el límite)
El uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite buscado es de la forma "0/0", las funciones $\dfrac{1}{-x^3+1} - 1$ y x son derivables, y la derivada del denominador $x' = 1$ no se anula.
(0,1 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)
Se usó además la continuidad de la función $\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ en $\bar{x} = 0$.
(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Primera forma de calcular el límite lateral derecho (límites conocidos)

Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{x^3+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{x^3}{x^3+1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^2}{x^3+1} = -\frac{0^2}{0^3+1} = 0,$$

(0,2 pts. por calcular el límite)

En este cálculo, usamos la continuidad de la función $\dfrac{x^2}{-x^3+1}$ en $\bar{x}=0$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Segunda forma de calcular el límite lateral derecho (regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x^3+1}-1}{x} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{3\cdot 0^2}{(0+1)^2} = 0.$$

(0,1 pts. por calcular el límite)

El uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite buscado es de la forma "0/0", las funciones $\dfrac{1}{x^3+1}-1$ y x son derivables, y la derivada del denominador $x'=1$ no se anula.

(0,1 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Se usó además la continuidad de la función $\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ en $\bar{x}=0$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Cálculo directo del límite (sin usar límites laterales)

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{|x|^3+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{|x|^3}{|x|^3+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x(|x|^3+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot|x|}{x(|x|^3+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot|x|}{|x|^3+1} = \frac{0\cdot 0}{0^3+1} = 0,
\end{aligned}$$

(0,4 pts. por hacer este cálculo)

donde usamos que $|x^3| = |x^2\cdot x| = |x^2|\cdot|x| = x^2\cdot|x|$, ya que $x^2\geq 0$.

(0,1 pts. por justificar que $|x^3| = x^2\cdot|x|$)

Además, usamos la continuidad de la función $\dfrac{x\cdot|x|}{|x|^3+1}$ en $\bar{x}=0$, que proviene de que es una combinación de polinomios y la función valor absoluto. **(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)**

Vemos así que $f'(0)$ existe y vale 0.

En resumen,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Finalmente, vemos que $\bar{x}=0$ es el único punto crítico de f. En efecto, ya sabemos que $f'(0)=0$. Además, las funciones $\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ y $-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ no se anulan para $x \neq 0$.

(0,1 pts. por observar que $\bar{x} = 0$ es el único punto crítico de f)

b) **(1,5 pts.)** Encuentre (si los hay) los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

Solución

Para saber dónde f es creciente y dónde es decreciente, debemos analizar el signo de f'.

Primera forma para determinar el signo de f' (analizando directamente la expresión)

Si $x < 0$, tenemos que

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(-x^3+1)^2} > 0,$$

(0,4 pts. por notar que f' es positiva en $(-\infty, 0)$)

ya que el numerador y denominador son siempre positivos.
Similarmente, si $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2} < 0,$$

(0,4 pts. por notar que f' es negativa en $(0, +\infty)$)

ya que el numerador y denominador son siempre positivos.

Segunda forma para determinar el signo de f' (evaluando)

Si $x < 0$, tenemos que
$$f'(x) = \frac{3x^2}{(-x^3+1)^2}.$$
Esta es una función racional, por lo que es continua en $(-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por justificar la continuidad)

Así, gracias al teorema de los valores intermedios, no puede cambiar de signo salvo que tenga un cero.

(0,1 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Como sabemos que no tiene ceros en el intervalo $(-\infty, 0)$, debe tener signo constante en este intervalo.

(0,1 pts. por justificar que el signo es constante)

Así, evaluar en cualquier punto para determinar su signo allí.
Notamos que:
$$f'(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^2}{(-(-1)^3+1)^2} = \frac{3}{4} > 0.$$
Así, f' es positiva en $(-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es positivo en el intervalo $(-\infty, 0)$)

Similarmente, si $x > 0$,
$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}.$$
Esta es una función racional, por lo que es continua en $(-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por justificar la continuidad)

Así, gracias al teorema de los valores intermedios, no puede cambiar de signo salvo que tenga un cero.

(0,1 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Como sabemos que no tiene ceros en el intervalo $(0, +\infty)$, debe tener signo constante en este intervalo.

(0,1 pts. por justificar que el signo es constante)

Así, evaluar en cualquier punto para determinar su signo allí.
Notamos que:
$$f'(1) = -\frac{3 \cdot 1^2}{(1^3+1)^2} = -\frac{3}{4} < 0.$$
Así, f' es negativa en $(0, +\infty)$.

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es negativo en el intervalo $(0, +\infty)$)

Concluimos entonces que f es (estrictamente) creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$, y (estrictamente) decreciente en el intervalo $[0, \infty)$. **(0,3 pts. por encontrar los intervalos de monotonía de f)**
Esto se puede resumir en la siguiente tabla:

	$-\infty$ … 0	0 … ∞
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Tabla 1: Intervalos de monotonía de f.

Como el único punto crítico de f es $\bar{x} = 0$, solo aquí puede haber un mínimo o máximo local.

(0,2 pts. por usar la regla de Fermat para obtener el candidato a máximo o mínimo local)

Además, como f pasa de ser estrictamente creciente a estrictamente decreciente en $\bar{x} = 0$, concluimos que $\bar{x} = 0$ es un máximo global (y, por lo tanto, también local).

(0,2 pts. por justificar que $\bar{x} = 0$ es un máximo global)

Observación

No es posible usar el criterio de caracterización de puntos críticos para determinar la naturaleza de $\bar{x} = 0$. En efecto, $f''(\bar{x}) = 0$, pero $f'''(\bar{x})$ no existe. Así, en $\bar{x} = 0$, las derivadas que existen son todas cero.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

Solución

Veremos que f' es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

En efecto, $f'(x)$ coincide con $\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ si $x \in (-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por notar que f' coincide con $\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ en $(-\infty, 0)$)

Como esta es una función racional, es derivable en todo punto de su dominio.

(0,1 pts. por justificar que $\frac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ es derivable)

Así, f es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in (-\infty, 0)$. **(0,1 pts. por concluir que f' es derivable en $(-\infty, 0)$)**

La derivada aquí es:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2)' \cdot (-x^3+1)^2 - ((-x^3+1)^2)' \cdot (3x^2)}{(-x^3+1)^4} = \frac{(6x \cdot (-x^3+1)^2 - 2(-x^3+1) \cdot (-3x^2) \cdot (3x^2)}{(-x^3+1)^4} \\ &= \frac{(6x \cdot (-x^3+1) - 2 \cdot (-3x^2) \cdot (3x^2)}{(-x^3+1)^3} = \frac{6x(-x^3+1+3x^3)}{(-x^3+1)^3} = \frac{6x(2x^3+1)}{(-x^3+1)^3}. \end{aligned}$$

(0,1 pts. por calcular f'' en $(-\infty, 0)$)

Ahora, $f'(x)$ coincide con $-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ si $x \in (0, +\infty)$.

(0,1 pts. por notar que f' coincide con $-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ en $(0, +\infty)$)

Como esta es una función racional, es derivable en todo punto de su dominio.

(0,1 pts. por justificar que $-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ es derivable)

Así, f es derivable en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} \in (0, +\infty)$. **(0,1 pts. por concluir que f' es derivable en $(0, +\infty)$)**

La derivada aquí es:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(3x^2)' \cdot (x^3+1)^2 - ((x^3+1)^2)' \cdot (3x^2)}{(-x^3+1)^4} = -\frac{(6x \cdot (x^3+1)^2 - 2(x^3+1) \cdot (3x^2) \cdot (3x^2)}{(x^3+1)^4} \\ &= -\frac{(6x \cdot (x^3+1) - 2 \cdot (3x^2) \cdot (3x^2)}{(x^3+1)^3} = -\frac{6x(x^3+1-3x^3)}{(x^3+1)^3} = -\frac{6x(1-2x^3)}{(x^3+1)^3} = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}. \end{aligned}$$

(0,1 pts. por calcular f'' en $(0, +\infty)$)

Falta ver que f' es derivable en $\bar{x} = 0$.

Podemos calcular los límites laterales (usando varios métodos posibles), o calcular el límite directamente:

Primera forma de calcular el límite lateral izquierdo (límites conocidos)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x}{(-x^3+1)^2} = \frac{3 \cdot 0}{(-0^3+1)^2} = 0,$$

(0,2 pts. por calcular el límite)

donde usamos la continuidad de la función $\dfrac{3x}{(-x^3+1)^2}$ en $\bar{x} = 0$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Segunda forma de calcular el límite lateral izquierdo (regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}}{x} \\
&\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{6x\cdot(-x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(-x^3+1)\cdot(-3x^2)}{(-x^3+1)^4}}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{6x(-x^3+1)^2+18x^4(-x^3+1)}{(-x^3+1)^4} \\
&= \frac{6\cdot 0\cdot(-0^3+1)^2+18\cdot 0^4\cdot(-0^3+1)}{(-0^3+1)^2} = 0,
\end{aligned}$$

(0,1 pts. por calcular el límite)

donde el uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite es de la forma "0/0", las funciones $\dfrac{3x^2}{(-x^3+1)^2}$ y x son derivables, y la derivada del denominador $x'=1$ no se anula.

(0,1 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Se usó además la continuidad de la función $\dfrac{6x(-x^3+1)^2+18x^4(-x^3+1)}{(-x^3+1)^4}$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Primera forma de calcular el límite lateral derecho (límites conocidos)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{3x}{(x^3+1)^2} = -\frac{3\cdot 0}{(0^3+1)^2} = 0,$$

(0,2 pts. por calcular el límite)

donde usamos la continuidad de la función $-\dfrac{3x}{(x^3+1)^2}$ en $\bar{x}=0$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Segunda forma de calcular el límite lateral derecho (regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \frac{-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}}{x} \\
&\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{6x\cdot(x^3+1)^2-3x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^4}}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{6x(x^3+1)^2+18x^4(x^3+1)}{(x^3+1)^4} \\
&= \frac{6\cdot 0\cdot(0^3+1)^2-18\cdot 0^4\cdot(0^3+1)}{(0^3+1)^2} = 0,
\end{aligned}$$

(0,1 pts. por calcular el límite)

donde el uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite es de la forma "0/0", las funciones $-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ y x son derivables, y la derivada del denominador $x'=1$ no se anula.

(0,1 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Se usó además la continuidad de la función $-\dfrac{6x(x^3+1)^2+18x^4(x^3+1)}{(x^3+1)^4}$.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Cálculo directo del límite (sin usar límites laterales)

A partir de la fórmula de la parte a), tenemos que

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(|x|^3+1)^2}h(x),$$

donde $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función "signo" definida por

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(0,2 pts. por reescribir $f'(x)$)

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{3x^2}{(|x|^3+1)^2}h(x) - 0}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{3x}{(|x|^3+1)^2}h(x) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3}{(|x|^3+1)^2} \cdot \lim_{x\to 0} xh(x) = \frac{3}{0^3+1} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$ **(0,2 pts. por hacer este cálculo)**

donde usamos que $\lim_{x\to 0} xh(x) = 0$ ya que es un límite del tipo "nula por acotada".

(0,1 pts. por justificar que $\lim_{x\to 0} xh(x) = 0$)

Observación

La función $h(x)$ no *es continua, así que no se puede usar la continuidad para justificar este límite.*

Además, usamos la continuidad de la función $\dfrac{3}{(|x|^3+1)^2}$ en $\bar{x} = 0$, que proviene de que es una combinación de polinomios y la función valor absoluto.

(0,1 pts. por justificar el uso de la continuidad)

Vemos así que $f''(0)$ existe y vale 0.

En resumen,

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6x(2x^3+1)}{(-x^3+1)^3} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Finalmente, vemos que $f''(\bar{x}) = 0$ solo cuando $\bar{x} = 0$, cuando $2\bar{x}^3 + 1 = 0$ y cuando $2\bar{x}^3 - 1 = 0$. Esto es, cuando $\bar{x} \in \{-1/\sqrt[3]{2}, 0, 1/\sqrt[3]{2}\}$. **(0,1 pts. por calcular los puntos donde f'' se anula)**

d) **(1,5 pts.)** Determine (si los hay) los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava.

Solución

Para saber dónde f es convexa y dónde es cóncava, debemos analizar el signo de f''.

(0,1 pts. por indicar que basta ver el signo de f'')

Primera forma (Analizando directamente la expresión)

Supongamos primero que $x < 0$. Tenemos que

$$f''(x) = \frac{6x(2x^3+1)}{(-x^3+1)^3}.$$

Notemos que $6x < 0$ y $-x^3+1 > 0$, por lo que el signo de $f''(x)$ es contrario al signo de $2x^3+1$.

(0,2 pts. por indicar que el signo depende solo de $\boldsymbol{2x^3+1}$)

Así, $f''(x)$ será positiva si $x \in (-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$, y será negativa si $x \in (-1/\sqrt[3]{2}, 0)$.

(0,3 pts. por indicar dónde $\boldsymbol{f''(x)}$ es positiva/negativa en el intervalo $\boldsymbol{(-\infty, 0)}$)

Supongamos ahora que $x > 0$. Tenemos que

$$f''(x) = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

Notemos que $6x > 0$ y $x^3+1 > 0$, por lo que el signo de $f''(x)$ es igual al signo de $2x^3-1$.

(0,2 pts. por indicar que el signo depende solo de $\boldsymbol{2x^3-1}$)

Así, $f''(x)$ será negativa si $x \in (0, 1/\sqrt[3]{2})$, y será positiva si $x \in (1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

(0,3 pts. por indicar dónde $\boldsymbol{f''(x)}$ es positiva/negativa en el intervalo $\boldsymbol{(0, +\infty)}$)

Segunda forma para determinar el signo de f' (evaluando)

Si $x < 0$, tenemos que

$$f''(x) = \frac{6x(2x^3+1)}{(-x^3+1)^3}.$$

Esta es una función racional, por lo que es continua en $(-\infty, 0)$.

(0,1 pts. por justificar la continuidad)

Así, gracias al teorema de los valores intermedios, no puede cambiar de signo salvo que tenga un cero.

(0,1 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Como sabemos que no tiene ceros en el intervalo $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$, debe tener signo constante en este intervalo. **(0,1 pts. por justificar que el signo es constante)**

Así, evaluar en cualquier punto para determinar su signo allí. Esto también es válido para el intervalo $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$.

Notamos que:

$$f''(-1) = \frac{6 \cdot (-1) \cdot (2 \cdot (-1)^3 + 1)}{(-(-1)^3+1)^3} = \frac{3}{4} > 0$$
$$f''(-1/2) = \frac{6 \cdot (-1/2) \cdot (2 \cdot (-1/2)^3 + 1)}{(-(-1/2)^3+1)^3} = -\frac{128}{81} < 0.$$

Así, f' es positiva en $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$ y negativa en $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$.

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es positivo en el intervalo $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$)

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es negativo en el intervalo $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$)

Similarmente, si $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

Esta es una función racional, por lo que es continua en $(0, +\infty)$.

(0,1 pts. por justificar la continuidad)

Así, gracias al teorema de los valores intermedios, no puede cambiar de signo salvo que tenga un cero.

(0,1 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Como sabemos que no tiene ceros en el intervalo $(0, 1/\sqrt[3]{2})$, debe tener signo constante en este intervalo.

(0,1 pts. por justificar que el signo es constante)

Así, evaluar en cualquier punto para determinar su signo allí. Esto también es válido para el intervalo $(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

Notamos que:

$$f''(1) = \frac{6 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1^3 - 1)}{(1^3+1)^3} = \frac{3}{4} > 0$$
$$f''(1/2) = \frac{6 \cdot (1/2) \cdot (2 \cdot (1/2)^3 - 1)}{((1/2)^3+1)^3} = -\frac{128}{81} < 0.$$

Así, f' es negativa en $(0, 1/\sqrt[3]{2})$ y positiva en $(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es positivo en el intervalo $(0, 1/\sqrt[3]{2})$)

(0,1 pts. por evaluar y obtener que el signo es negativo en el intervalo $(1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$)

En conclusión, obtenemos que f es convexa en el intervalo $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2}]$.

(0,1 pts. por concluir que f es convexa en $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2}]$)

Además, f es cóncava en el intervalo $[-1/\sqrt[3]{2}, 0]$.

(0,1 pts. por concluir que f es cóncava en $[-1/\sqrt[3]{2}, 0]$)

Por otro lado, f es cóncava en el intervalo $[0, 1/\sqrt[3]{2}]$.

(0,1 pts. por concluir que f es cóncava en $[0, 1/\sqrt[3]{2}]$)

Además, f es convexa en el intervalo $[1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

(0,1 pts. por concluir que f es convexa en $[1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$)

En resumen, la convexidad y concavidad de f es:

	$-\infty$ $-1/\sqrt[3]{2}$	$-1/\sqrt[3]{2}$ $1/\sqrt[3]{2}$	$1/\sqrt[3]{2}$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Tabla 2: Intervalos de convexidad y concavidad de f.

P2. a) **(3,0 pts.)** Sean α y β números reales positivos. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ (1 + \alpha x)^{1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determine los valores de α y β que hacen que f sea continua en $\bar{x} = 0$.

Solución

Para que f sea continua en $\bar{x} = 0$ debe ocurrir que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0). \tag{1}$$

Sabemos que $f(0) = 2$, por lo que estos dos límites laterales deben ser iguales a 2.

(0,2 pts. por indicar que ambos límites laterales deben ser iguales a $f(0) = 2$)

Calculemos los límites en función de α y β:

Primera forma de calcular el límite lateral izquierdo (límite conocido)

Notemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{x}{x + \operatorname{sen}(3x)} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(\beta x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) \cdot \frac{x}{x + \operatorname{sen}(3x)} \\ &= \left(\beta \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\beta x)}{\beta x} - \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + 3 \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} \right) = \frac{\beta - 1}{4}. \end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular el límite)

donde usamos los cambios de variable $u = \beta x$ y $v = 3x$ y el límite conocido $\displaystyle\lim_{t \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$.

(0,3 pts. por hacer bien el cambio de variable)

(0,3 pts. por justificar el uso del límite conocido)

Segunda forma de calcular el límite lateral izquierdo (regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\beta \cos(\beta x) - \cos(x)}{1 + 3\cos(3x)} = \frac{\beta \cos(\beta \cdot 0) - \cos(0)}{1 + 3\cos(3 \cdot 0)} = \frac{\beta - 1}{4}.$$

(0,6 pts. por calcular el límite)

El uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite buscado es de la forma "0/0", las funciones $\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)$ y $x + \operatorname{sen}(3x)$ son derivables, y la derivada del denominador $(x + \operatorname{sen}(3x))' = 1 + 3\cos(3x)$ no se anula en el intervalo $(-\pi/6, 0)$.

(0,6 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Primera forma de calcular el límite lateral derecho (límite conocido)

Notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x} = \lim_{u\to +\infty} \left(1+\frac{\alpha}{u}\right)^u = e^\alpha,$$

(0,6 pts. por calcular el límite)

donde usamos el cambio de variable $u = 1/x$ y la definición de la función exponencial.

(0,3 pts. por hacer bien el cambio de variable)

(0,3 pts. por justificar el cálculo del límite por la definición de función exponencial)

Segunda forma de calcular el límite lateral derecho (logaritmo y límite conocido)

Notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x}.$$

Aplicamos logaritmo "dentro del límite", quedando:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left((1+\alpha x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = \alpha,$$

(0,3 pts. por calcular el límite)

donde usamos el cambio de variable $u = \alpha x$ y el límite conocido $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

(0,2 pts. por hacer bien el cambio de variable)

(0,2 pts. por justificar el uso del límite conocido)

Ahora, gracias a la continuidad de la función exponencial en $\bar{x} = \alpha$, podemos aplicar exponencial para obtener que

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \ln\left((1+\alpha x)^{1/x}\right)\right) = e^\alpha.$$

(0,3 pts. por calcular el límite)

(0,2 pts. por justificar el uso de la continuidad para calcular el límite)

Tercera forma de calcular el límite lateral derecho (logaritmo y regla de l'Hôpital)

Notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x}.$$

Aplicamos logaritmo "dentro del límite", quedando:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left((1+\alpha x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha x}}{1} = \frac{\alpha}{1+\alpha\cdot 0} = \alpha,$$

(0,3 pts. por calcular el límite)

donde el uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite buscado es de la forma "0/0", las funciones $\ln(1+\alpha x)$ y x son derivables al ser combinaciones de polinomios y logaritmos, y la derivada del denominador $x' = 1$ nunca se anula. **(0,2 pts. por justificar el uso de l'Hôpital)**

El último límite se justifica por la continuidad de la función $\dfrac{\alpha}{(1+\alpha x)}$ en $\bar{x} = 0$.

(0,2 pts. por justificar el uso continuidad para calcular el último límite)

Ahora, gracias a la continuidad de la función exponencial en $\bar{x} = \alpha$, podemos aplicar exponencial para obtener que

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \ln\left((1+\alpha x)^{1/x}\right)\right) = e^\alpha.$$

(0,3 pts. por calcular el límite)

(0,2 pts. por justificar el uso de la continuidad para calcular el límite)

Así, (1) queda:

$$e^{\alpha} = \frac{\beta - 1}{4} = 2,$$

(0,2 pts. por indicar la ecuación que deben satisfacer α y β)

Obtenemos que $\alpha = \ln(2)$ **(0,1 pts. por obtener el valor correcto de α)**

Además, vemos que $\beta = 9$. **(0,1 pts. por obtener el valor correcto de β)**

b) **(3,0 pts.)** Sea $a \in [0, 1]$. Demuestre que la ecuación $2x^3 = a(x^4+1)$, con incógnita $x \in \mathbb{R}$, tiene al menos una solución.

Solución

Primera forma (teorema de los valores intermedios en $[0, 1]$ directamente)

Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{2x^3}{x^4+1} = a.$$

(0,3 pts. por reescribir la ecuación)

Esto sugiere definir la función auxiliar la función auxiliar $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{2x^3}{x^4+1}.$$

(1,0 pto. por definir la función h)

Sabemos que h es continua al ser una función racional. **(0,3 pts. por justificar que h es continua)**
Tenemos que

$$h(0) = 0 \qquad \textbf{(0,2 pts. por calcular } h(0)\textbf{)}$$
$$h(1) = 1. \qquad \textbf{(0,2 pts. por calcular } h(1)\textbf{)}$$

Como h es continua y $a \in [0, 1]$, el teorema de los valores intermedios asegura que existe $\bar{x} \in [0, 1]$ tal que $h(\bar{x}) = a$. **(0,5 pts. por usar correctamente el teorema de los valores intermedios)**
Se tiene que $\bar{x}$ es una solución de la ecuación.

(0,5 pts. por concluir que $\bar{x}$ es solución de la ecuación original)

Segunda forma (encontrando un cero en $[0, 1]$)

Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{2x^3}{x^4+1} - a = 0.$$

(0,3 pts. por reescribir la ecuación)

Esto sugiere definir la función auxiliar la función auxiliar $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{2x^3}{x^4+1} - a.$$

(1,0 pto. por definir la función h)

Sabemos que h es continua al ser una función racional. **(0,3 pts. por justificar que h es continua)**
Tenemos que

$$h(0) = -a \leq 0 \qquad \textbf{(0,2 pts. por notar que } h(0) \leq 0\textbf{)}$$
$$h(1) = 1 - a \geq 0, \qquad \textbf{(0,2 pts. por notar que } h(1) \geq 0\textbf{)}$$

por lo que h cambia de signo en $[0, 1]$.
Como h es continua, el teorema de los valores intermedios asegura que h tiene un cero $\bar{x} \in [0, 1]$.

(0,5 pts. por usar correctamente el teorema de los valores intermedios)

Se tiene que $\bar{x}$ es una solución de la ecuación.

(0,5 pts. por concluir que $\bar{x}$ es solución de la ecuación original)

Tercera forma (teorema de los valores intermedios en $[1,\infty)$ directamente)

Primero, si $a=0$, tenemos inmediatamente que $x=0$ es una solución de la ecuación. Supondremos entonces que $a\in(0,1]$. **(0,1 pts. por analizar el caso $a=0$)**
Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{2x^3}{x^4+1}=a. \qquad \textbf{(0,3 pts. por reescribir la ecuación)}$$

Esto sugiere definir la función auxiliar la función auxiliar $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$h(x)=\frac{2x^3}{x^4+1}. \qquad \textbf{(1,0 pto. por definir la función } h\textbf{)}$$

Sabemos que h es continua al ser una función racional. **(0,3 pts. por justificar que h es continua)**
Tenemos que

$$h(1)=1 \qquad \textbf{(0,2 pts. por calcular } h(0)\textbf{)}$$
$$\lim_{x\to\infty}h(x)=0. \qquad \textbf{(0,2 pts. por notar que } \lim_{x\to\infty}h(x)=0\textbf{)}$$

Como $a>0$, esto significa que existe $b\in[1,\infty)$ tal que $h(b)<a$.
Como h es continua y $a\in[h(b),1]$, el teorema de los valores intermedios asegura que existe $\bar{x}\in[1,b]$ tal que $h(\bar{x})\le a$. **(0,5 pts. por usar correctamente el teorema de los valores intermedios)**
Se tiene que $\bar{x}$ es una solución de la ecuación.
(0,4 pts. por concluir que $\bar{x}$ es solución de la ecuación original)

Cuarta forma (encontrando un cero en $[1,\infty)$)

Primero, si $a=0$ tenemos inmediatamente que $x=0$ es una solución de la ecuación. Supondremos entonces que $a\in(0,1]$. **(0,1 pts. por analizar el caso $a=0$)**
Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{2x^3}{x^4+1}=a. \qquad \textbf{(0,3 pts. por reescribir la ecuación)}$$

Esto sugiere definir la función auxiliar la función auxiliar $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$h(x)=\frac{2x^3}{x^4+1}-a. \qquad \textbf{(1,0 pto. por definir la función } h\textbf{)}$$

Sabemos que h es continua al ser una función racional. **(0,3 pts. por justificar que h es continua)**
Tenemos que

$$h(1)=1-a\ge 0 \qquad \textbf{(0,2 pts. por notar que } h(1)\ge 0\textbf{)}$$
$$\lim_{x\to\infty}h(x)=-a. \qquad \textbf{(0,2 pts. por notar que } \lim_{x\to\infty}h(x)=-a\textbf{)}$$

Como $a>0$, esto significa que existe $b\in[1,\infty)$ tal que $h(b)\le 0$. Vemos así que h cambia de signo en $[1,\infty)$.
Como h es continua, el teorema de los valores intermedios asegura que h tiene un cero $\bar{x}\in[0,1]$.
(0,5 pts. por usar correctamente el teorema de los valores intermedios)
Se tiene que $\bar{x}$ es una solución de la ecuación.
(0,4 pts. por concluir que $\bar{x}$ es solución de la ecuación original)

P3. Considere la función $f\colon(-1,+\infty)\to(-1/e,+\infty)$ dada por $f(x)=x\exp(x)$. Se tiene que f es biyectiva (no lo demuestre), por lo que admite una inversa $f^{-1}\colon(-1/e,+\infty)\to(-1,+\infty)$.

a) **(1,5 pts.)** Muestre que f^{-1} es derivable con

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x+\exp(f^{-1}(x))}$$

para todo $x \in (-1/e, +\infty)$.

Solución

Notemos que f es derivable al ser un producto de un polinomio y una exponencial.
(0,2 pts. por justificar que f es derivable)
Además, sabemos que f es biyectiva. **(0,1 pts. por hacer explícita esta hipótesis)**
Así, por el teorema de la derivada de una función inversa, f^{-1} es derivable en todos los puntos $\bar{x} \in (-1/e, +\infty)$ tales que $f'(f^{-1}(\bar{x})) \neq 0$. **(0,1 pts. por justificar que f^{-1} es derivable en estos puntos)**
Por lo tanto, basta verificar que f' nunca se anula para que f^{-1} sea derivable en todo su dominio.
Tenemos que:

$$f'(x) = x' \cdot \exp(x) + x \cdot \exp'(x) = \exp(x) + x\exp(x) = \exp(x)(x+1).$$ **(0,2 pts. por calcular $f'(x)$)**

Como $\exp(x) \neq 0$, basta comprobar que $x + 1 \neq 0$. Esto resulta directamente de que $x \in (-1, +\infty)$, es decir, $x > -1$. **(0,2 pts. por justificar que f' no se anula en $(-1, +\infty)$)**
Concluimos así que f^{-1} es derivable.
Además, el teorema establece que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$ **(0,2 pts. por enunciar la derivada de la inversa)**

Como

$$f'(x) = \exp(x) + x\exp(x) = \exp(x) + f(x)$$ **(0,2 pts. por notar que $f'(x) = \exp(x) + f(x)$)**

vemos que

$$f'(f^{-1}(x)) = \exp(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(x)) = x + \exp(f^{-1}(x)).$$
(0,2 pts. por notar que $f'(f^{-1}(x)) = x + \exp(f^{-1}(x))$)

Por lo tanto,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x + \exp(f^{-1}(x))}.$$ **(0,1 pts. por concluir)**

b) **(1,5 pts.)** Demuestre la desigualdad

$$f^{-1}(x) + \exp(f^{-1}(x)) \geq x + 1$$

para todo $x \in (0, 1]$.
Indicación: Defina la función auxiliar $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f^{-1}(x) + \exp(f^{-1}(x))$ y use el teorema del valor medio en un intervalo conveniente.

Solución

Sea $x \in (0,1]$. Notemos que h es continua en el intervalo $[0, x]$ y que es derivable en el intervalo $(0, x)$ porque f^{-1} y exp son continuas en $[0, x]$ y derivables en $(0, x)$ por la parte anterior.
(0,2 pts. por justificar las hipótesis del teorema del valor medio)
Así, el teorema del valor medio muestra que existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(\xi).$$ **(0,3 pts. por usar el teorema del valor medio)**

Podemos desarrollar estas expresiones. Comenzamos calculando $h(0)$:

$$f(0) = 0 \implies f^{-1}(0) = 0 \implies h(0) = 0 + \exp(0) = 1.$$ **(0,2 pts. por calcular $h(0)$)**

Continuamos calculando $h'(\xi)$:

$$h'(\xi) = \frac{1}{\xi + \exp(f^{-1}(\xi))} + \exp(f^{-1}(\xi)) \cdot \frac{1}{\xi + \exp(f^{-1}(\xi))} = \frac{1 + \exp(f^{-1}(\xi))}{\xi + \exp(f^{-1}(\xi))}.$$ **(0,2 pts. por calcular $h'(\xi)$)**

De este modo, obtenemos que

$$\frac{h(x) - 1}{x} = \frac{1 + \exp(f^{-1}(\xi))}{\xi + \exp(f^{-1}(\xi))} \iff h(x) = x \cdot \frac{1 + \exp(f^{-1}(\xi))}{\xi + \exp(f^{-1}(\xi))} + 1.$$
(0,2 pts. por llegar a esta fórmula para $h(x)$)

Finalmente, tenemos que

$$\frac{1+\exp(f^{-1}(\xi))}{\xi+\exp(f^{-1}(\xi))} \geq 1,$$

ya que

$$1+\exp(f^{-1}(x)) \geq \xi + \exp(f^{-1}(x))$$

porque $\xi \in (0,1)$. **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{\frac{1+\exp(f^{-1}(\xi))}{\xi+\exp(f^{-1}(\xi))} \geq 1}$)**

Así, resulta que $h(x) \geq x+1$, que es exactamente lo buscado. **(0,2 pts. por concluir)**

c) **(1,5 pts.)** Muestre que $(f^{-1})'$ es derivable con

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{x+2\exp(f^{-1}(x))}{(x+\exp(f^{-1}(x)))^3}$$

para todo $x \in (-1/e, +\infty)$.

Solución

Recordemos que, por la parte a), $f^{-1}(x)$ es derivable en $(1/e, +\infty)$ con

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x+\exp(f^{-1}(x))}.$$

Esta expresión es un cociente de funciones derivables, por lo que también es derivable.

(0,3 pts. por justificar que $(f^{-1})'$ es derivable)

Derivando:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})''(x) &= -\frac{(x+\exp(f^{-1}(x))'}{(x+\exp(f^{-1}(x))^2} && \textbf{(0,3 pts. por usar la regla de la cadena)}\\
&= -\frac{1+\exp(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)}{(x+\exp(f^{-1}(x))^2} && \textbf{(0,3 pts. por usar la regla de la cadena)}\\
&= -\frac{1+\exp(f^{-1}(x))\cdot\dfrac{1}{x+\exp(f^{-1}(x))}}{(x+\exp(f^{-1}(x))^2} && \textbf{(0,3 pts. por usar la parte a))}\\
&= -\frac{\dfrac{x+\exp f^{-1}(x)+\exp(f^{-1}(x))\cdot}{x+\exp(f^{-1}(x))}}{(x+\exp(f^{-1}(x))^2}\\
&= -\frac{x+2\exp(f^{-1}(x))}{(x+\exp(f^{-1}(x))^3}. && \textbf{(0,3 pts. por obtener la fórmula buscada)}
\end{aligned}$$

d) **(1,5 pts.)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f^{-1} en torno a $\bar{x}=0$.

Solución

El polinomio de Taylor de orden 2 de f^{-1} en torno a $\bar{x}=0$ es:

$$T^2_{f^{-1}}(x) = f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)x + \frac{(f^{-1})''(0)}{2}x^2. \tag{2}$$

(0,3 pts. por enunciar la fórmula del polinomio de Taylor)

El hecho de que $f(0)=0$ junto a las partes anteriores muestra que:

- $f^{-1}(0)=0$; **(0,3 pts. por encontrar $\boldsymbol{f^{-1}(0)}$)**
- $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{\exp(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{\exp(0)} = 1$; y **(0,3 pts. por encontrar $\boldsymbol{(f^{-1})'(0)}$)**
- $(f^{-1})''(0) = -\dfrac{2\exp(f^{-1}(0))}{(\exp(f^{-1}(0)))^3} = -\dfrac{2\exp(0)}{(\exp(0))^3} = -2.$ **(0,3 pts. por encontrar $\boldsymbol{(f^{-1})''(0)}$)**

Reemplazando en (2), resulta

$$T^2_{f^{-1}}(x) = x - x^2.$$

(0,3 pts. por encontrar $T^2_{f^{-1}}(x)$)