P1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^{7/3}$$

a) Demuestre que la función pertenece a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ pero no $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.

$f(x)$ es continua, (+0.5)

$f'(x) = \frac{7}{3} x^{4/3}$, función continua por ser composición de la raíz cúbica y un polinomio. (+0.3 cálculo +0.2 justificación)

$f''(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} x^{1/3}$ continua por el mismo motivo. (+0.5)

$$f'''(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 1}{3^3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}}$$

función que no está definida en $x=0$, luego f no es diferenciable en 0.

(+0.3 cálculo
+0.2 justificación)

b) pol. de Taylor de grado 2 alrededor de $x=0$

$$P(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2$$

pero $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$

luego $P(x) = 0$. (+1.5 por el cálculo
+0.5 por evaluar en 0)

c) Dado que en $x=1$ la función es diferenciable infinitas veces podemos calcular el polinomio de Taylor en ese punto del orden que queramos. (+0.7)

Para estimar el error que se comete al calcular $f(2)$ con el polinomio alrededor de $x=1$ está dado por:

$$\left| \frac{f^{(IX)}(\xi) \cdot (x-1)^9}{9!} \right| \quad \text{para } \xi \in (1,2)$$

$$f^{(IX)}(\xi) = K \cdot \frac{(x-2)^9}{9!} \qquad (+0.7)$$

con $K = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-2)}{3} \cdot \frac{(-5)}{3} \cdot \frac{(-8)}{3} \cdot \frac{(-11)}{3} \cdot \frac{(-14)}{3} \cdot \frac{(-17)}{3}$

$$|K| = \frac{4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17}{3^9}$$

luego el error $R \leq K \cdot \frac{1}{9!}$ (+0.6)

P2) Demuestre que si $n \in \mathbb{N}^{\circ}$ y $x_0 > 0$ entonces existe un único número positivo x tq $x^n = x_0$

Definimos $f(x) = x^n$

continua en $[0, c]$ $\forall c \in \mathbb{R}^+$

sea $c > 1$ y $x_0 < c$

luego $0 < x_0 < c$

(+ 1.0 por definir)

Si $x_0 > 1$ (+0.5)

entonces $x_0 < x_0^n < c^n$

ya que x^n es estrictamente creciente.

si $x_0 < 1$ (+0.5)

$x_0 < c < c^n$

entonces $f(c) > x_0$ y como f

es continua

$f(0) = 0$

$f(c) = c^n$

(+1.0 por uso del Teorema del valor Intermedio)

toma todos los valores en $[0, c^n]$ en particular x_0.

b) Compruebe que entre los ceros de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6}$ se encuentra la raiz de la derivada.

Vale hacerlo asumiendo que hay dos raices sin calcularlas

$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-6)}$

$f(x) = 0 \iff (x+1)(x-6) = 0$

$f(-1) = 0 \,,\ f(6) = 0$

Por TVM $f(x)$ continua en $[-1, 6]$

(+1.5 por el uso del TVM)

derivable en $(-1,6)$

además $f(-1) = f(6) = 0$ (+0.5)

luego existe un $x_0 \in (-1,6)$ tq

$f'(x_0) = 0$. ie: la derivada tiene una raiz en $(-1,6)$. (+1.0)

P3) $P(x) = 300 - 0{,}02x$

$C_p(x) = 30x + 9000$

$R(x) = P(x) \cdot x - C(x)$

$R(x) = 300x - 0{,}02x^2 - 30x - 9000$

$R(x) = -0{,}02x^2 - 270x - 9000$

(+1.0 por llegar a la función de ganancia)

Para calcular el máximo:

Forma 1:

$R'(x) = -0{,}04x + 270$

$R'(x) = 0 \iff x = \dfrac{270}{0{,}04}$

$x = 6750$ (+1.5)

para verificar que es máximo basta ver:

$R''(x) = -0{,}04 < 0 \Rightarrow$ máximo local. (+0.5)

o argumentar con la geometría de la parábola.

Forma 2:

Hallar el punto (+1.5)
Justificación máximo + parábola (+0.5)

Basta ver que la función es una parábola, con ver que la parábola tiene coef. ppal menor a cero y que tendrá un máximo en su vértice.

b) Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L > 0$

$|f(x) - f(y)| < L|x-y|$.

Demuestre que f es continua

Sea $x_0 \in I$, sea $\varepsilon > 0$

tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ (+1.5) luego si $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon$$

luego $f(x)$ es continua en x_0, para todo $x_0 \in I$. (+1.5)

(En otras palabras:

Continuidad +1.5

Hallar el buen delta +1.5)