Pauta C1

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 30 Abril 2021

Profesor de cátedra: Pablo Ugalde Salas
Profesora auxiliar: Cynthia Vega

P1

Demuestre o refute con un contraejemplo las siguientes afirmaciones **[1 pto c/u]**:

1. Sea $f : [0, 2a] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2a)$. Entonces existe un punto $\bar{x} \in [0, \bar{a}]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x} + a)$.

   Verdadero, considerar la función $g : [0, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + a) - f(x)$. Así $g(0)g(a) = (f(a) - f(0))(f(2a) - f(a)) = (f(a) - f(0))(f(0) - f(a)) \leq 0$, y se concluye por el TVI.

2. Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a, b), entonces f es continua en a.

   Falso: Considere $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ con $f = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$. Así la función es diferenciable en $(0, 1)$, pero discontinua en 0.

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Entonces f es cóncava.

   Falso: Considere $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 0]$.

4. Sea $f(x) = \sin(x)$ y $P(x) = x - x^3 + x^5$ y $(x_n) \subset \mathbb{R}$, con $x_n \to 0$, entonces $\left| \dfrac{\sin(x_n) - P(x_n)}{(x_n)^6} \right| \to 0$.

   Verdadero: $P(x)$ es el desarrollo de taylor de orden 6 de en torno a 0 de $\sin(x)$, el límite es verdad por el teorema de taylor. Se puede hacer por L'Hôpital también.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado $n > 2$. Entonces f cambia $n - 2$ veces de convexidad (pasa de ser cóncava a convexa o viceversa).

   Falso: Considere $f(x) = x^4$. $f''(x) = 12x^2 \geq 0$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio. Sea $\bar{x}$ mínimo global de la función, entonces $\bar{x}$ es el único punto que satisface $f'(\bar{x}) = 0$.

   Falso: Considere $f(x) = (x - 2)^2(x - 4)^2$. Cualquier función con dos mínimos locales sirve de contraejemplo.

P2

1. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f = \begin{cases} e^{ax^2} \ln(x) & \text{si } x \leq 1 \\ \cos(bx) & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Encuentre valores de a y b tal que la función sea diferenciable en todo su dominio. **[3 pts]**.

   Primero hay que evaluar continuidad en 1. Y con eso se obtiene $e^a \ln(1) = 0 = \cos(b)$ y por lo que $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sirve **[1 pto]**. Luego para evaluar diferenciabilidad los limites por izquierda ypor derecha deben quedar idénticos, la derivada de la función para $x < 1$ es: $ae^{ax^2} \ln(x)2x + \frac{e^{ax^2}}{x}$ y para $x > 1$ es $-b\sin(bx)$. Al evaluar en 1 ambas expresiones obtenemos la ecuación : $e^a = -b\sin(b)$ **[1 pto]**. De donde vemos que el lado derecho de la ecuación debe ser positivo para que esta tenga solución, así el valor $b = \frac{3\pi}{2}$ sirve para que la ecuación y tenemos que $e^a = \frac{3\pi}{2}$, de donde se obtiene a **[1 pto]**.

2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ y convexa en su dominio, con $f(0) = 0$. Demuestre que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ $\forall x \in (0, \infty)$. **[3 pts]**.

   Por el TVM tenemos que $\forall x\, \exists c \in (0, x)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = f'(c)$ [**1.5 pto**]. luego como la función es convexa su derivada es creciente y por lo tanto $f'(c) \leq f'(x)$ y se tiene el resultado [**1.5 pto**].