SEMANA 7

Integral de Riemann

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.

Surge entonces la pregunta de ¿Cuales son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY. El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones.

(A1) $A(E) \geqslant 0$

(A2) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leqslant A(F)$

(A3) Si $A(E \cap F) = 0 \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$

(A4) El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá mas adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

Observación 1. *Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo (A2) es una consecuencia de (A1) y (A3)*

Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.

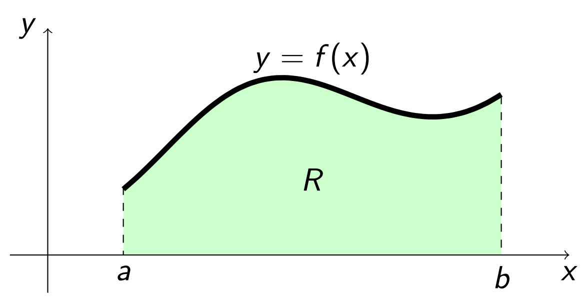


Figura 1: Región bajo una curva positiva.

Mediante un ejemplo se mostrará un método para determinar el área bajo una curva, que nos indicará el procedimiento a seguir en la definición de la integral de Riemann.

Por el momento, nos concentramos en la propiedad A_3, que sugiere dividir la región R en regiones más pequeñas. Por este motivo, el primer elemento que incorpora la definición de integral de Riemann es el concepto de partición, que sirve intuitivamente, para dividir la región R en bandas verticales, como se muestra en la figura 2. Antes de dar la definición formal de este concepto, mencionemos que la idea de cortar la región R por bandas verticales es una de las característica más notable de la idea de Riemann. La otra integral que a veces se menciona en los cursos matemáticos es la de Lebesgue, que se caracteriza por dividir la region R cortando en el eje OY de las imágenes. La gran complicación de esa teoría alternativa, es que por un lado se deben manipular los conjuntos preimágenes y por otro lado estos conjuntos pueden ser de geometría muy compleja.

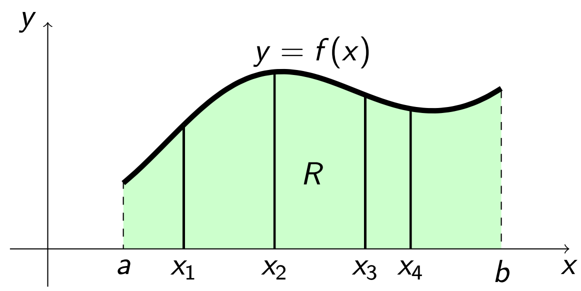


Figura 2: Región R cortada por bandas verticales.

Definición 2. *Una* **partición** *de un intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *es un conjunto finito de puntos* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *tales que*

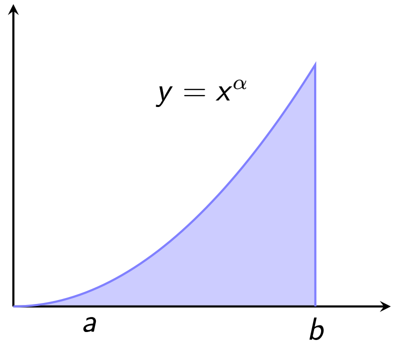
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Se llama **norma** *de la partición* P *al real* $|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$

Una vez que la región R se ha dividido, hay que calcular el área de cada una de las bandas verticales. Es en este momento, donde las complicaciones comienzan. Todo depende de lo complicada que sea la función tratada. En lo que sigue de esta sección, se explota esta idea hasta sus últimas consecuencias, pero solamente par la función $y = x^\alpha$.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^\alpha$, donde $\alpha > 0$, se desea calcular el área encerrada entre $x = a$ y $x = b > 0$ bajo la curva $y = f(x)$, es decir, calcular el área de $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \in [a,b], 0 \leqslant y \leqslant x^\alpha\}$.



Para estimar el área de la región R comenzamos por considerar una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$. Digamos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ (ver dibujo de la pizarra).

La segunda idea importante es "acotar". Para ello, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P, levantamos rectángulos por dentro y por fuera de la region considerada. Para que las cotas sean "lo mejor posible", se levantan rectángulos inscritos lo mas altos posibles y rectángulos exteriores lo más bajos posible.

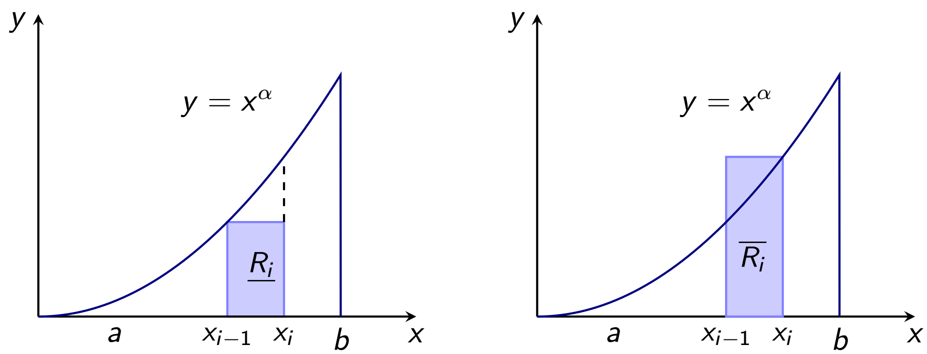


Figura 3: Cotas inferior y superior de R_i

Es así como:

$$\underline{R}_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, x_{i-1}^\alpha]$$
$$\overline{R}_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, x_{i-1}^\alpha]$$

Con esto claramente

$$\bigcup_{i=1}^{n} \underline{R}_i \subseteq R \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{R}_i$$

Ahora usamos las propiedades A_2, A_3 de área para deducir que

$$\sum_{i=1}^{n} A(\underline{R}_i) \leqslant A(R) \leqslant \sum_{i=1}^{n} A(\overline{R}_i)$$

Usando la propiedad A_4 de área, concluimos que

$$\forall P \text{ partición de } [a, b], \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^\alpha (x_i - x_{i-1}) \leqslant A(R) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha (x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

Para terminar con nuestras estimaciones, hay que calcular explícitamente las sumatorias. Para ello debemos considerar casos especiales de las particiones, donde el cálculo es realizable con álgebra elemental.

Para situaciones especiales como la aquí considerada, usaremos principalmente dos tipos de particiones especiales:

- Las particiones equi-espaciadas donde $x_i = a + i * \frac{b-a}{n}$. Aquí el factor $h = \frac{b-a}{n}$ se llama el paso de la partición, y corresponde exactamente a su norma.
- Las particiones que siguen una progresión geométrica, donde $x_i = a * r^i$, donde r es la razón de la progresión, que es $r = \sqrt[n]{b/a}$. Estas particiones solo se pueden usar si $0 < a < b$.

En el primer caso el álgebra es más simple, ya que $(x_i - x_{i-1}) = h$ es constante, de ese modo la desigualdad (1) queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + h(i-1))^\alpha \leqslant A(R) \leqslant h \cdot \sum_{i=1}^{n} (a + hi)^\alpha. \tag{2}$$

Para calcular las sumatorias, en este primer caso, vamos a suponer que $a = 0$ y que α solo toma los casos particulares $\alpha = 1, 2$ ó 3. Así queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h^{1+\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^\alpha \leqslant A(R) \leqslant h^{1+\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^\alpha. \tag{3}$$

A continuación haremos todos los cálculos, recordando que las sumatorias para $\alpha = 1, 2$ ó 3 son conocidas:

- Para $\alpha = 1$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$
que simplificada queda
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^2}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n}.$$
Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y asi obtener que
$$A(R) = \frac{b^2}{2} = \frac{b \cdot H}{2},$$
que corresponde a la conocida fórmula del área de un triángulo, obtenida por aproximación de rectángulos internos y externos de ancho cada vez más pequeño.

- Para $\alpha = 2$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
que simplificada queda
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^3}{3} \cdot \frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})}{n^2} \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^3}{3} \cdot \frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})}{n^2}.$$
Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y así obtener que
$$A(R) = \frac{b^3}{3} = \frac{b \cdot H}{3},$$
que corresponde a la primera generalización del concepto de área a regiones parabólicas.

- Finalmente, para $\alpha = 3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^4}{n^4} \cdot \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^4}{n^4} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

  que simplificada queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b^4}{4} \cdot \left[\frac{n-1}{n}\right]^2 \leqslant A(R) \leqslant \frac{b^4}{4} \cdot \left[\frac{n+1}{n}\right]^2.$$

  Como esta desigualdad es cierta para todo n, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$, y asi obtener que

$$A(R) = \frac{b^4}{4} = \frac{b \cdot H}{4},$$

  que corresponde a una segunda generalización del concepto de área a regiones bajo parábolas cúbicas.

En el caso de particiones formadas por una progresión geométrica, el álgebra es más complicada, pero las sumatorias se pueden resolver para todo $\alpha > 0$. Recordando que los puntos de la partición están definidos por $x_i = a * r^i$, donde r es la razón de la progresión, igual a $r = \sqrt[n]{b/a}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1}) &= ar^i - ar^{i-1} = ar^{i-1}(r-1) \\ x_{i-1}^{\alpha} &= (ar^{i-1})^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot r^{(i-1)\alpha} \\ x_i^{\alpha} &= (ar^i)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot r^{\alpha} \end{aligned}$$

con esto, la desigualdad (1) queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} a^{\alpha} \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot ar^{i-1}(r-1) \leqslant A(R) \leqslant r^{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} a^{\alpha} \cdot r^{(i-1)\alpha} \cdot ar^{i-1}(r-1).$$

que reordenado se escribe como

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{\alpha+1}(r-1) \sum_{i=1}^{n} (r^{\alpha+1})^{(i-1)} \leqslant A(R) \leqslant r^{\alpha} \cdot a^{\alpha+1}(r-1) \sum_{i=1}^{n} (r^{\alpha+1})^{(i-1)}.$$

Aquí la sumatoria es conocida: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q-1}$. luego

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{\alpha+1}(r-1) \frac{(r^n)^{\alpha+1} - 1}{r^{\alpha+1} - 1} \leqslant A(R) \leqslant r^{\alpha} \cdot a^{\alpha+1}(r-1) \cdot \frac{(r^n)^{\alpha+1} - 1}{r^{\alpha+1} - 1}.$$

que reordenada, y consideando que $r = \sqrt[n]{b/a}$, queda

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{r-1}{r^{\alpha+1} - 1} \leqslant A(R) \leqslant r^{\alpha} \cdot (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \cdot \frac{r-1}{r^{\alpha+1} - 1}.$$

Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que $r \to 1$ y $\frac{r-1}{r^{\alpha+1}-1} \to \frac{1}{\alpha+1}$ (su réciproco es la derivada de $x^{\alpha+1}$ en $x = 1$). Por lo tanto se obtiene que

$$A(R) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Esta fórmula generaliza las obtenidas con particiones equiespaciadas, y constituye nuestra primera integral de Riemann, que cómo se verá más adelante corresponde a

$$\int_a^b x^\alpha = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

Obsérvese que esta fórmula es muy parecida a la fórmula de primitivas que decía

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

La razón de esta semejanza será vista cuando estudiemos el teorema fundamental del cálculo.

7.3 Integración de funciones escalonadas

En el tratamiento teórico que sigue consideraremos una teoría restringida, en la cual las áreas de las bandas verticales son muy fáciles de calcular. Se trata de la teoría de integración para funciones escalonadas. Más tarde mostraremos cómo es posible usar esta teoría restringida, para desarrollar la teoría general. Comenzaremos por definir las funciones escalonadas y luego veremos cómo se define su integral de Riemann. Antes de comenzar, insistamos que en la teoría de Riemann, la función puede tener signo arbitrario (o sea puede ser positiva o negativa).

Definición 3. *Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es* **escalonada**, *si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), $\forall i = 1, \ldots, n$.*

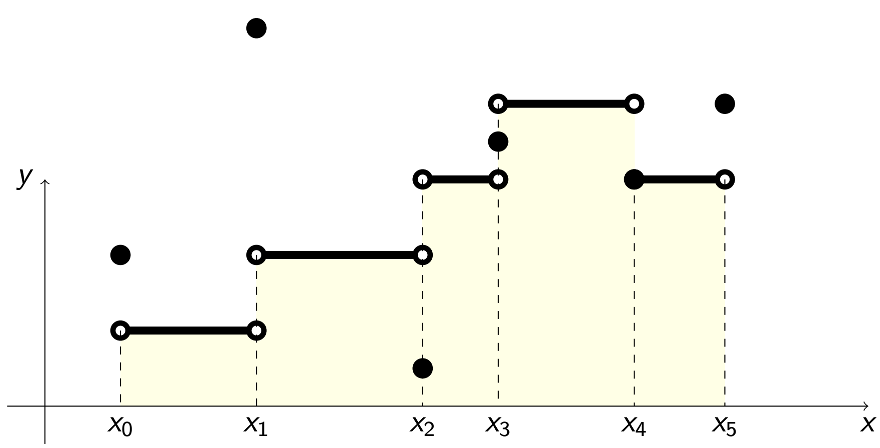


Figura 4: Función escalonada en $[a, b]$.

OBS: Las funciones escalonadas sólo toman un número finito de valores diferentes, que son: los valores $f(x_i)$ en los $n+1$ puntos de la partición y los valores constantes c_i que toma en los n intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i). Así resulta que toda función escalonada es **acotada**.

OBS: Diremos que P es una partición asociada a f. Esta partición P no es única ya que al subdividir los intervalos de P, la función f todavía será constante en las subdivisiones que resulten (ver figura 5. Por este motivo, antes de estudiar propiedades de estas funciones, conviene introducir el siguiente concepto:

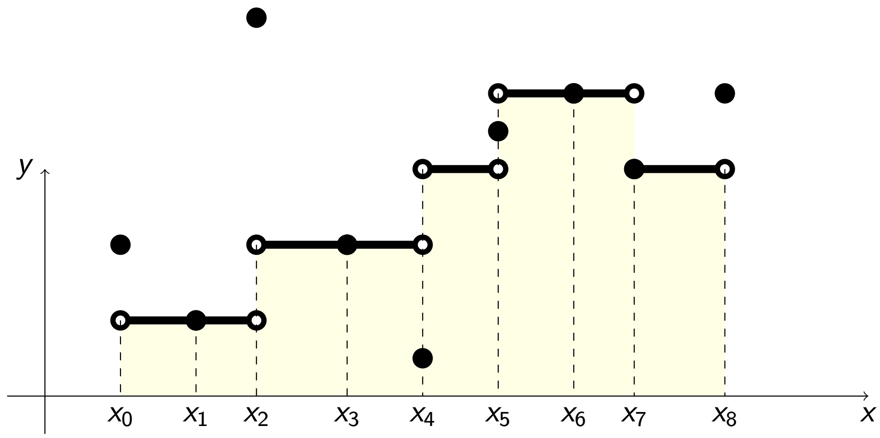


Figura 5: Otra partición para la misma función escalonada de la Figura 4.

Definición 4. *Sean P, Q son particiones de un mismo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q es más fina que P si se cumple que $P \subseteq Q$.*

OBS: Si P y Q son particiones cualesquiera, no siempre una es refinamiento de la otra, ya que el concepto de refinamiento NO está asociado directamente a la cantidad de puntos de una partición. Solo podemos decir que si Q es refinamiento de P, entonces Q tiene una cantidad de puntos mayor o igual que P, pero el recíproco es falso. Sin embargo, dadas dos particiones arbitrarias P y Q, siempre existe un refinamiento común a ellas. En efecto, $P \cup Q$ es una partición (ordenando sus puntos de menor a mayor) que es refinamiento de P y de Q simultáneamente.

Proposición 5. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función* **escalonada**. *Si para cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ asociada a f se calcula*

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde f_i denota al valor constante de f en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i). Entonces $I(f, P)$ no depende de P, es decir, es una cantidad que depende solamente de f.

Demostración. Sean P, Q particiones asociadas a f, es decir, particiones tales que f es constante en cada sub-intervalo definido por cada una de ellas.

$$P.D.Q : I(f, P) = I(f, Q)$$

Etapa 1) Consideremos primero el caso particular $P \subset Q$ tal que Q contiene exactamente un punto más que P. Digamos $Q = \{x_0, \ldots, x_n\}$ y $P = Q \setminus \{x_s\}$. De este modo tenemos que:

$$\begin{aligned} I(f, Q) &= \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ I(f, P) &= \sum_{i=1}^{s-1} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + f_s(x_{s+1} - x_{s-1}) + \sum_{i=s+1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

como P y Q son particiones asociadas a f, entonces f es constante en el intervalo (x_{s-1}, x_{s+1}), así $f_s = f_{s+1}$. Por lo tanto

$$f_s(x_{s+1} - x_{s-1}) = f_s(x_{s+1} - x_s + x_s - x_{s-1}) = f_{s+1}(x_{s+1} - x_s) + f_s(x_s - x_{s-1})$$

de donde se obtiene la igualdad.

Etapa 2) Consideremos un segundo caso particular, en que $P \subset Q$ cualquiera. Claramente, se puede pasar de la partición P a la partición Q por medio de particiones intermediarias construidas agregando un punto cada vez: $P = P_0 \subset P_1 \subset \cdots P_k = Q$. Usando el resultado anterior, se tiene que

$$I(f,P) = I(f,P_1) = \cdots = I(f,P_k) = I(f,Q).$$

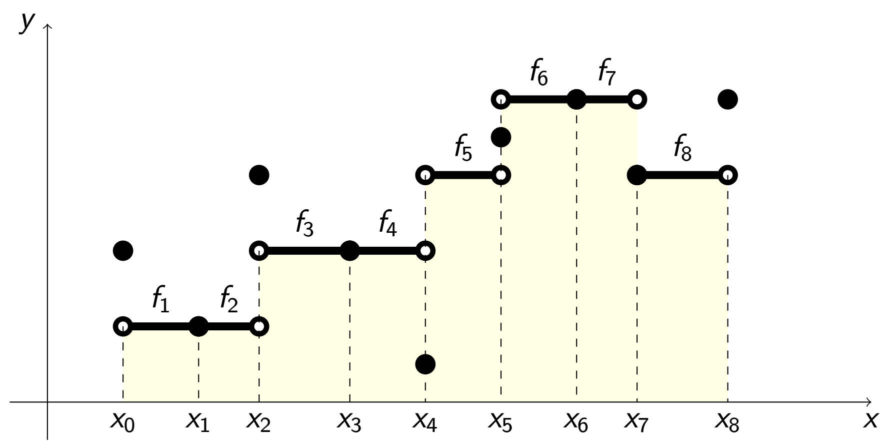
con lo cual la propiedad queda demostrada para el caso $P \subset Q$.

Etapa 3) En el caso general, basta tomar $R = P \cup Q$, que constituye una partición más fina que P y Q simultáneamente. Así, con lo demostrado anteriormente se tiene que

$$I(f,P) = I(f,R) \qquad y \qquad I(f,Q) = I(f,R).$$

De aquí se obtiene la igualdad buscada en el caso general.

q.e.d ■



$$\begin{aligned} I(f,P) = \; & \underbrace{f_1 \cdot (x_1 - x_0) + f_2(x_2 - x_1)}_{=f_1 \cdot (x_2 - x_1)} \\ & + \underbrace{f_3 \cdot (x_3 - x_2) + f_4(x_4 - x_3)}_{=f_3 \cdot (x_4 - x_2)} \\ & + f_5 \cdot (x_5 - x_4) \\ & + \underbrace{f_6 \cdot (x_6 - x_5) + f_7(x_7 - x_6)}_{=f_6 \cdot (x_7 - x_5)} \\ & + f_8 \cdot (x_8 - x_7) \end{aligned}$$

Figura 6: La integral de una función escalonada, no depende de la partición usada en su cálculo.

Definición 6. *Para cada función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **escalonada**, *se define su integral de Riemann como*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

donde $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *designa cualquier partición asociada a* f *y* f_i *denota al valor constante de* f *en el correspondiente intervalo abierto* (x_{i-1}, x_i).

OBS: También se suele usar la notación de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$

OBS: La integral de una función escalonada solo depende de los valores de f en los interiores de los intervalos de la partición y no de los valores de f en los bordes.

7.4 Propiedades de la integral de funciones escalonadas.

La integral de funciones escalonadas satisface las propiedades enunciadas en los siguientes 4 teoremas:

Teorema 7. *(Linealidad) Si f, g son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función escalonada en $[a, b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demostración. Sean f, g funciones escalonadas y sean P y Q particiones asociadas a f y g respectivamente (no necesariamente las mismas). Claramente la partición $R = P \cup Q$, que es un refinamiento común de P y Q está asociada a f y g simultáneamente. (en efecto, pensemos en f: cada intervalo abierto definido por la partición R está incluido en un intervalo abierto definido por P, donde f es constante. Análogo para g). Luego, si escribimos $R = \{x_0, \ldots, x_n\}$, resulta que

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i$$

donde f_i y g_i denotan los valores constantes de f y g en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Claramente la función $h = \alpha f + \beta g$ satisface:

$$h(x) = \alpha f_i + \beta g_i = h_i, \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

por lo tanto es una función escalonada y su integral vale

$$\int_a^b h = \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f_i + \beta g_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha f_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta g_i \Delta x_i = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

q.e.d ∎

Teorema 8. *(Aditividad horizontal) Si f es una función escalonada en el intervalo $[a, b]$ (donde $a < b$) y si $c \in (a, b)$ es arbitrario. Entonces, f es una función escalonada en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ y se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Sea f una función escalonada en $[a, b]$, sea P una partición asociada a f y sea $c \in (a, b)$. Claramente la partición $R = P \cup \{c\}$, es un refinamiento de P y por lo tanto, también está asociada a f (en efecto, cada intervalo abierto definido por la partición R está incluido en un intervalo abierto definido por P, donde f es constante). Para fijar ideas, digamos que $R = \{x_0, \ldots, x_n\}$, donde $x_0 = a$, $x_m = c$ y $x_n = b$, donde $0 < m < n$ y que $f(x) = f_i$ en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Claramente
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i.$$

Ahora, definiendo $P_1 = R \cap [a, c] = \{x_0, \ldots, x_m\}$ y $P_2 = R \cap [c.b] = \{x_m, \ldots, x_n\}$, se han formado dos particiones, la primera del intervalo $[a, c]$ y la otra del intervalo $[c, b]$. Como f es constante en cada intervalo abierto definido por P_1 (que son algunos de los intervalos abiertos definidos por R), f resulta ser escalonada en $[a, c]$ y su integral vale
$$\int_a^c f = \sum_{i=1}^{m} f_i \Delta x_i.$$
Análogamente, f es escalonada en $[c.b]$ y su integral vale
$$\int_c^b f = \sum_{i=m+1}^{m} f_i \Delta x_i.$$

Sumando ambas integrales se obtiene que
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \sum_{i=1}^{m} f_i \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{m} f_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta x_i = \int_a^b f.$$

q.e.d ■

Teorema 9. *(Monotonía) La integral de una función escalonada positiva en el intervalo $[a, b]$ es positiva. En consecuencia, si f, g son funciones escalonadas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que*
$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Demostración propuesta al lector.

7.5 Funciones Riemann integrables

En esta sección, veremos como se puede definir la Integral de Riemann para una clase muy amplia de funciones. En realidad, con esta teoría se puede integrar prácticamente cualquier función encontrada en ingeniería.

Inicialmente, no pondremos condiciones sobre la función f que trataremos. Puede ser continua o no. Sólo impondremos que se trate de una función bien definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, con $a < b$ y que sea acotada en dicho intervalo (es decir, que existan $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$).

Con estas únicas condiciones, que son bastante generales, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 10. *Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ arbitraria, entonces se cumple que:*

1. *Los siguientes conjuntos son no vacíos:*
   - *$\mathcal{E}_-(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que minoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], e(x) \leqslant f(x)$.*
   - *$\mathcal{E}_+(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que mayoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant e(x)$.*
2. *Siempre existen las cantidades*
$$I_-(f) = \sup\left\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_-\right\}, \qquad I_+(f) = \inf\left\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+\right\},$$
   llamadas integral inferior e integral superior de f en $[a, b]$ respectivamente.
3. *Estas integrales verifican la desigualdad*
$$I_-(f) \leqslant I_+(f).$$

Demostración. 1) Primero notamos que al ser f acotada en $[a, b]$, existen

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

de modo que las funciones escalonadas $f_-(x) = m$ y $f_+(x) = M$ son elementos de $\mathcal{E}_-$ y $\mathcal{E}_+$ respectivamente. Así, esos conjuntos no son vacíos.

2) Por otro lado, si $F \in \mathcal{E}_-$ y $G \in \mathcal{E}_+$ se cumple que

$$F(x) \leqslant G(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

por lo tanto

$$\forall F \in \mathcal{E}_-, \left(\forall G \in \mathcal{E}_+, \quad \int_a^b F \leqslant \int_a^b G\right)$$

El paréntesis de la expresión anterior indica que el conjunto $\left\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+\right\}$ es acotado inferiormente por el real $\int_a^b F$. En consecuencia su ínfimo existe y cumple:

$$\forall F \in \mathcal{E}_-, \int_a^b F \leqslant \inf \Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}.$$

Esta última desigualdad indica que el conjunto $\Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_- \Big\}$ es acotado superiormente y su supremo satisface la relación

$$\sup \Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_- \Big\} \leqslant \inf \Big\{ \int_a^b e \ : e \in \mathcal{E}_+ \Big\}.$$

Esto prueba que las cantidades $I_-(f)$ (Integral inferior) y $I_+(f)$ (Integral superior) de f siempre existen. Además se cumple la relación

$$I_-(f) \leqslant I_+(f), \qquad \forall f \text{ definida y acotada en } [a, b].$$

q.e.d ■

La duda que queda en el teorema anterior, es si la última desigualdad es o no estricta. Pues bien, con las hipótesis generales que hemos puesto, resulta que algunas funciones satisfacen la igualdad y otras la desigualdad estricta. En el último caso, habrían 2 integrales para la misma función, lo cual no es útil. Por esa razón, dichas funciones se descartan de la teoría y se dice que no son Riemann integrables.

Cuando se cumple la igualdad, el cálculo resultante es muy útil y por eso se hace la siguiente definición:

Definición 11. *Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si se cumple la*

$$I_-(f) = I_+(f).$$

Dicho número común se llama la integral de f en el intervalo $[a, b]$ y se le denota por

$$\int_a^b f \quad \text{o bien} \quad \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(Notación de Leibniz).}$$

Después de entender la definición previa, surge la pregunta: ¿Cuales son las funciones Riemann integrables? o ¿Cómo saber si una función dada es o no Riemann integrable? Para responder a esta última pregunta, es útil demostrar el siguiente teorema, que caracteriza totalmente a las funciones Riemann integrables.

Ejemplo 12 (Una función NO Riemann integrable)**.** *Consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

esta función no es Riemann integrable en $[a, b]$ ya que: Si e_- es una función escalonada tal que $e_-(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) se tendrá que $e_{-_i} \leqslant 0$, de modo que $\displaystyle\int_a^b e_-(x) \leqslant 0$.

Análogamente, si $e_+(x)$ es una función escalonada mayorante, es decir que cumple $e_+(x) \geqslant\leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces, en cada intervalo donde e_+ es constante se tendrá que $e_{+_i} \geqslant 1$ y por lo tanto $\int_a^b e_+ \geqslant (b-a)$.

Con esto, $\int_a^b (e_+ - e_-) \geqslant (b-a)$, con lo cual no es posible cumplir la condición de Riemann.

Teorema 13 (Condición de Riemann)**.** *Una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solamente si*

$$\text{“}\ \forall \varepsilon > 0 \text{ existen } f_- \in \mathcal{E}_- \text{ y } f_+ \in \mathcal{E}_+ \text{ tales que } \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \varepsilon.\text{”}$$

Demostración. Primero veamos que la condición de Riemann es suficiente:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sabemos que existen funciones escalonadas $f_-(x) \in \mathcal{E}_-$ y $f_+(x) \in \mathcal{E}_+$ tales que

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Pero,

$$\int_a^b f_- \leqslant I_-(f) \leqslant I_+(f) \leqslant \int_a^b f_+$$

Es decir, usando (4) se obtiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |I_+(f) - I_-(f)| \leqslant \varepsilon$$

de donde se obtiene que $I_-(f) = I_+(f)$ y así f resulta ser Riemann integrable.

Recíprocamente, si f es Riemann integrable en $[a, b]$, sabemos que $I_-(f) = I_+(f)$. Pero, (por definición de infimo y supremo) para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x) \in \mathcal{E}_-$ y $f_+(x) \in \mathcal{E}_+$ tales que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_a^b f_-, \qquad \int_a^b f_+ \leqslant I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

de aquí, restando se tiene que

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \varepsilon.$$

con lo cual la función satisface la condición de Riemann.

q.e.d ■

Funciones Riemann Integrables

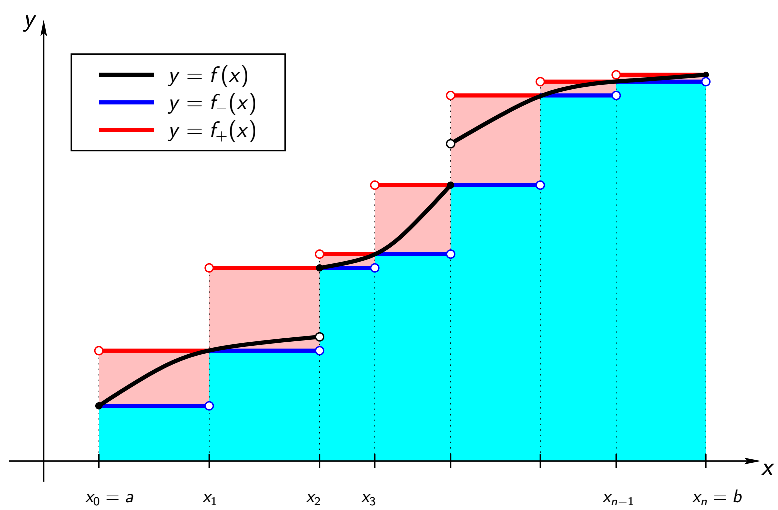
En esta sección veremos como la condición de Riemann permite demostrar que tanto las funciones monótonas en $[a, b]$ (no necesariamente continuas) y las funciones continuas en $[a, b]$, son ambas clases de funciones Riemann integrables. Esta propiedad la estudiaremos en detalle en los próximos 2 teoremas:

Teorema 14. *Toda función monótona en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Para fijar ideas, supongamos que f es creciente en $[a, b]$. Tomemos una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ cualquiera del intervalo $[a, b]$ y construyamos las siguientes funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$\begin{aligned} f_-(x) &= f(x_{i-1}) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f_+(x) &= f(x_i) \quad \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.



Claramente, para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x)$.

Además:

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i, \qquad \int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

de modo que

$$\int_a^b (f_+ - f_-) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_i) - f(x_{i-1}) \Big) \Delta x_i \leqslant |P|(f(b) - f(a))$$

Para que esta diferencia sea menor que $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta tomar cualquier partición P de modo que su norma sea lo suficientemente pequeña. $(|P| \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1})$

Teorema 15. *Toda función continua en $[a, b]$ es Riemann integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Tomemos una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ cualquiera del intervalo $[a, b]$ y construyamos las siguientes funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f_+(x) &= \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.

Claramente, para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x)$.

Además:

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i, \qquad \int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \Delta x_i.$$

de modo que

$$\Delta = \int_a^b (f_+ - f_-) = \sum_{i=1}^n \Big(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)\Delta x_i$$

Como f es continua en $[a, b]$, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, f alcanza su mínimo y su máximo. Digamos que

$$\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(s_i) \quad \text{y} \quad \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(t_i)$$

donde $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ahora recordamos que las funciones continuas en un compacto $[a, b]$ son uniformemente continuas en $[a, b]$, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos $s, t \in [a, b]$ tales que $|s - t| \leqslant \delta$ se cumple que:

$$|f(s) - f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

La demostración concluye tomando cualquier partición P de modo que su norma sea menor o igual a δ, así aseguramos que $|s_i - t_i| \leqslant \delta$ y con esto resulta que:

$$\Delta \leqslant \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\varepsilon}{b - a}\Big)\Delta x_i = \varepsilon.$$

q.e.d ■

Observación 16. *En la demostración de ambos teoremas, se han usado las funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:*

$$\begin{aligned} f_-(x) &= m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ f_+(x) &= M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición.

Con ellas se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^b f_- &= \sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i \\ \int_a^b f_+ &= \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i\end{aligned}$$

que suelen llamarse suma inferior y suma superior de f asociadas a P, y se denotan respectivamente por $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

Pues bien, en ambos casos (funciones monótonas y/o continuas) existe $\delta > 0$ de modo que si $|P| \leqslant \delta$ se obtiene $S(f,P) - s(f,P) \leqslant \varepsilon$

Estas sumas son interesantes, pero no tan fáciles de calcular, debido a las definiciones de m_i y M_i. Por este motivo muchas veces se suele usar la suma obtenida por la integración de una función escalonada intermediaria, la cual se define en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_*(x) \ = \ f(s_i) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

donde los reales s_i son arbitrarios del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Claramente en este caso:

$$s(f,P) \leqslant \int_a^b f_* = \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i \leqslant S(f,P)$$

La sumatoria intermedia se conoce como suma de Riemann.

Como la integral de f también satisface la desigualdad

$$s(f,P) \leqslant \int_a^b f \leqslant S(f,P)$$

se concluye que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partición de } [a,b], |P| \leqslant \delta \Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$$

Esta propiedad es una de las motivaciones de la notación de Leibniz, entendiendo que la integral es el límite de una sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i.$$

En este límite la variable que tiende a cero es la norma de la partición P ($|P| \to 0$) y se calcula sobre las sumas de Riemann. Esto explica el uso del signo integral (especie de S alargada, como límite del signo sumatoria) y de la notación de Leibnitz, donde el $f(x)dx$ representa al sumando $f(s_i)\Delta x_i$.

8.1 Propiedades de la Integral

Con las dos clases de funciones encontradas en la sección previa, tenemos muchas funciones a las que se le puede definir su integral. Sin embargo, esta clase puede crecer aun más si se combinan funciones y se aplican las propiedades que demostraremos en los siguientes 4 teoremas:

Teorema 17. *(Linealidad) Si f, g son dos funciones Riemann integrables en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función Riemann integrable en $[a, b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demostración. **(Caso de la suma de funciones integrables)**
Si f, g son Riemann integrables en $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x)$, $f_+(x)$, $g_-(x)$ y $g_+(x)$ tales que

$$f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x), \qquad g_-(x) \leqslant g(x) \leqslant g_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{5}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{y} \qquad \int_a^b g_+ - \int_a^b g_- \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Sumando en (5) se obtiene que

$$f_-(x) + g_-(x) \leqslant f(x) + g(x) \leqslant f_+(x) + g_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{7}$$

y usando (6) resulta que

$$\int_a^b [f_+ + g_+] - \int_a^b [f_- + g_-] \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

de donde se deduce que $f + g$ es Riemann integrable en $[a, b]$.

Además de (6) se pueden escribir las siguientes desigualdades (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_a^b f_- \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b f_+ \leqslant \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_a^b g_- \leqslant \int_a^b g \leqslant \int_a^b g_+ \leqslant \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

De (7) se tiene que

$$\int_a^b f_- + \int_a^b g_- \leqslant \int_a^b [f + g] \leqslant \int_a^b f_+ + \int_a^b g_+$$

que combinada con (9) y (10) se transforma en

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon \leqslant \int_a^b [f + g] \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left| \int_a^b [f+g] - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leqslant \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b [f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(Caso de la ponderación de funciones integrables)
Sea f una función Riemann integrable y sea $\alpha > 0$. (Si $\alpha = 0$ claramente αf es integrable y su integral es 0).

Para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x)$ y $f_+(x)$ tales que:

$$f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{11}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{12}$$

Multiplicando (11) por $\alpha > 0$ se obtiene que

$$\alpha f_-(x) \leqslant \alpha f(x) \leqslant \alpha f_+(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{13}$$

y usando (12) resulta que

$$\int_a^b [\alpha f_+] - \int_a^b [\alpha f_-] dx \leqslant \varepsilon, \tag{14}$$

de donde se deduce que αf es Riemann integrable en $[a,b]$.

Además de (12) se puede escribir la siguiente desigualdad (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{\alpha} \leqslant \int_a^b f_- \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b f_+ \leqslant \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{\alpha} \tag{15}$$

De (13) se tiene que

$$\alpha \int_a^b f_- \leqslant \int_a^b \alpha f \leqslant \alpha \int_a^b f_+$$

que combinada con (15) se transforma en

$$\alpha \int_a^b f - \varepsilon \leqslant \int_a^b \alpha f \leqslant \alpha \int_a^b f + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left| \int_a^b \alpha f - \left(\alpha \int_a^b f \right) \right| \leqslant \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

Para terminar con el caso $\alpha < 0$, basta con probar que si f es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces $-f$ es Riemann integrable en $[a, b]$. En efecto, para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas f_- y f_+ tales que:

$$f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{16}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Multiplicando (16) por -1 se obtiene que

$$-f_+(x) \leqslant -f(x) \leqslant -f_-(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{18}$$

y usando (17) resulta que

$$\int_a^b [-f_-] - \int_a^b [-f_+] \leqslant \varepsilon, \tag{19}$$

de donde se deduce que $-f$ es Riemann integrable en $[a, b]$.

Además de (17) se puede escribir la siguiente desigualdad (útiles en lo que sigue):

$$\int_a^b f - \varepsilon \leqslant \int_a^b f_- \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b f_+ \leqslant \int_a^b f + \varepsilon \tag{20}$$

De (18) se tiene que

$$-\int_a^b f_+ x \leqslant \int_a^b (-f) \leqslant -\int_a^b f_-$$

que combinada con (20) se transforma en

$$-\int_a^b f - \varepsilon \leqslant \int_a^b -f \leqslant -\int_a^b f + \varepsilon$$

Esta última expresión dice que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\left| \int_a^b (-f) - \left(-\int_a^b f \right) \right| \leqslant \varepsilon$$

de donde se deduce la igualdad

$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$

q.e.d ■

Teorema 18. *(Aditividad horizontal) Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ entonces f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y solamente si, para cada $c \in (a, b)$ arbitrario se tiene que f es Riemann integrable en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.*
En tal caso se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración propuesta al lector.

Teorema 19. *(Monotonía) La integral de una función Riemann integrable positiva en el intervalo $[a, b]$ es positiva; en consecuencia, si f, g son funciones Riemann integrables en $[a, b]$ tales que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Demostración propuesta al lector.

Teorema 20. *(Desigualdad triangular) Si f es una función Rieman integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es Riemann integrable en $[a, b]$ y se tiene que*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

En consecuencia, si $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, se cumple

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant M(b - a).$$

Demostración. Sea f una función R-I en $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $f_-(x)$ y $f_+(x)$ tales que:

$$f_-(x) \leqslant f(x) \leqslant f_+(x), \qquad \forall x \in [a, b] \tag{21}$$

y

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Como es habitual, se descompone la función f en la diferencia de dos funciones positivas, del modo siguiente:

$$P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Así se tiene que $f = P - N$ y $|f| = P + N$. La demostración se concluye probando que P es R-I en $[a, b]$, ya que por algebra se deduce que N también lo es y en consecuencia $|f|$.

Claramente de (21) se deduce que en cada punto donde $f(x) \geqslant 0$ se tiene que

$$f_-(x) \leqslant P(x) \leqslant f_+(x).$$

En los puntos donde $f(x) < 0$, resulta que $P(x) = 0$, por lo tanto queda

$$0 \leqslant P(x) \leqslant 0$$

. De este modo construimos las funciones escalonadas siguientes:

$$P_+(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{si } f_+(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f_+(x) < 0 \end{cases}$$

$$P_-(x) = \begin{cases} f_-(x) & \text{si } f_+(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f_+(x) < 0 \end{cases}$$

que claramente satisfacen:

$$P_-(x) \leqslant P(x) \leqslant P_+(x)$$

y

$$\int_a^b (P_+ - P_-) \leqslant \int_a^b (f_+ - f_-) \leqslant \varepsilon.$$

Luego, P es Riemann integrable en $[a, b]$ y en consecuencia N y $|f|$.

q.e.d ■

8.2 Integral de a a b con $a \geqslant b$

Definición 21. *Sea f una función integrable en un intervalo $[p, q]$. Si $a, b \in [p, q]$ son tales que $a \geqslant b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= -\int_b^a f \quad \text{si } a > b, \text{ o} \\ \int_a^b f &= 0 \quad \text{si } a = b. \end{aligned}$$

con esta definición, las propiedades de la integral se pueden enunciar así:

Proposición 22. *Sean f y g integrales en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$ entonces:*

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p, q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\ \forall x \in [p, q] \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$

Demostración. La demostraciones son sencillas y se dejan propuestas como ejercicios.