**MA1002 Cálculo Diferencial e Integral**
**Profesores:** Andrés Contreras-Donato Vásquez Varas
**Auxiliares:** Ignacia Segura-Camilo Gómez
**29 de julio de 2020**

# Pauta Examen

**P1.** Considere la función $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$. Determine:

**(a)** (1 *punto*) Dominio, recorrido y puntos de intersección con los ejes coordenados.

**(b)** (1 *punto*) Continuidad de la función y simetría con respecto al eje vertical y el origen (paridad e imparidad). Determinar si la función posee puntos de discontinuidad reparables.

**(c)** (1 *punto*) Asíntotas, si las hay.

**(d)** (1 *punto*) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**(e)** (1 *punto*) Máximos y mínimos indicando explícitamente cuáles son y donde se alcanzan, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

**(f)** (1 *punto*) Esbozo del gráfico de $f$.

**SOLUCIÓN.**

**(a)** Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados: Note que

$$\begin{aligned} x \in Dom(f) \Leftrightarrow -1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2x}{x^2+1}+1 \ge 0\right) \wedge \left(\frac{2x}{x^2+1}-1 \le 0\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \ge 0\right) \wedge \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \ge 0\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}.\ (0{,}5\ \textit{puntos}) \end{aligned}$$

Por lo que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y además $Rec(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por otra parte, el único punto de interseción con lo ejes es $P = (0, 0)$. (0,5 *punto*)

**(b)** Continuidad: En este caso $f$ es composición de funciones continuas, por lo tanto ha de ser continua en $\mathbb{R}$ (0,5 *punto*). Por otra parte

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{(-x)^2+1}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = -f(x).$$

Por lo tanto $f$ es una función impar. (0,5 *punto*)

**(c)** Asíntotas: Ocupando la continuidad de $f$, encontramos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0.$$

Por lo tanto $y = 0$ es la asíntota horizontal de $f$ (0,5 *punto*). Además la función no posee asíntotas oblicua pues $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (0,25 *puntos*). Además $f$ no posee asíntota vertical (0,25 *puntos*)

**(d)** Máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento: Calculemos la primera derivada de $f$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \left[\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}\right] = \frac{2(1-x^2)}{|x^2-1|(x^2+1)}\ (0{,}25\ \textit{puntos}).$$

Por otra parte, $x \in Dom(f)$ es un punto crítico cuando $f'(x) = 0$ o cuando $f'(x)$ no existe, lo cual en este caso ocurre cuando $x = -1$ ó $x = 1$. Además $f'(x) > 0$ si $x \in (-1,1)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Por lo tanto $f$ es creciente en $(-1,1)$ (0,25 *puntos*) decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (0,25 *puntos*), pero además $f$ alcanza un mínimo local en $x = -1$ que está dado por $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, y alcanza un máximo local en $x = 1$, el cual está dado por $f(1) = \frac{\pi}{2}$ (0,25 *puntos*).

**(e)** Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad: Calculemos la segunda derivada de $f$. Para ello consideremos los siguientes casos:

**(i)** **Caso 1.** Consideremos $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. En este caso se tiene que $f'(x) = -\frac{2}{x^2+1}$. Por lo que $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ (0,25 *puntos*).

**(ii)** **Caso 2.** Consideremos $x \in (-1,1)$. En este caso $f'(x) = \frac{2}{x^2+1}$, de donde $f''(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ (0,25 *puntos*).

En resumen,

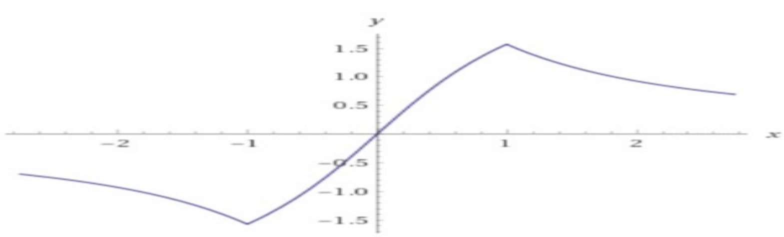
$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & ; \quad x \in (-1,1), \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & ; \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty). \end{cases} \tag{1}$$

Por otra parte,

$$x \in Dom(f) \text{ es un punto de inflexión de } f \Leftrightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. (0{,}25 \textit{ puntos})$$

Además, $f''(x) > 0$ cuando $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, mientras que $f''(x) < 0$ si $x \in (-1,1)$. Por lo tanto $f$ es convexa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava en $(-1,1)$ (0,25 *puntos*).

**(f)** Esbozo del gráfico de $f$: (1 *punto*)




**P2.** **(a)** (3 *puntos*) Estudie la convergencia de la integral impropia $\int_0^{1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

**SOLUCIÓN.** En este caso estamos tratando con una integral impropia de segunda especie. Con lo que

$$\int_0^{1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^{b} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx \text{ (0,25 \textit{puntos})}. \tag{2}$$

Por otra parte, haciendo el cambio $z^2 = 1-x,\ dx = -2zdz$, con lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx &= -2\int \sqrt{2-z^2}dz \text{ (0,25 \textit{puntos})} \\ &= -2\sqrt{2}\int \sqrt{2-2\sin^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \text{ (0,5 \textit{puntos})} \\ &= -4\int \cos^2(\theta)d\theta \\ &= -2\theta - 2\sin(\theta)\cos(\theta) + C \text{ (0,5 \textit{puntos})} \\ &= -2\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{1-x^2} + C \text{ (0,5 \textit{puntos})}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo haciendo el cambio trigonométrico $z = \sqrt{2}\sin(\theta)$. Luego, reemplazando la primitiva (3) en (2) y usando el Teorema Fundamental de Cálculo, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx \\
&= \lim_{b\to 1^-} -2\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{1-x^2}\Big|_{x=0}^{x=b} (0{,}25 \textit{ puntos}) \\
&= \lim_{b\to 1^-} -2\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{1-b^2} + \frac{\pi}{2} + 1 \ (0{,}25 \textit{ puntos}) \\
&= \frac{\pi}{2} + 1 \ (0{,}25 \textit{ puntos}). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral impropia converge (0.25 puntos).

**(b)** Estudie la convergencia de las siguientes series numéricas:

**(i)** (1,5 *puntos*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}}$.

**SOLUCIÓN.** Sea $a_n = \left|(-1)^n \sin^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}}\right| = \sin^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}} \leq \frac{(2n)!}{n^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$ (0,25 *puntos*).

Por otra parte, consideremos $b_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4e^{-2} < 1, \ (0{,}25 \textit{ puntos})$$

pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = e^{-2}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ (0,25 *puntos*). Por el criterio del cuociente se tiene que la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$ es convergente (0,25 *puntos*). Finalmente, por el criterio de comparación se concluye que la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n \sin^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}}\right|$ converge (0,25 *puntos*) por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}}$ es convergente (0,25 *puntos*).

**(ii)** (1,5 *puntos*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2\sin^2(n)}$.

**SOLUCIÓN.** Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 + n^2\sin^2(n) \leq 1 + n^2$, por lo que $\frac{n}{1+n^2\sin^2(n)} \geq \frac{n}{1+n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (0,25 *puntos*). Vamos a estudiar la convergencia de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$. Para ello, considere $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \geq 1$. Entonces

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0 \text{ para todo } x \geq 1. \ (0{,}25 \textit{ puntos})$$

Así, $f$ es decreciente en $(1, +\infty)$. Además

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = +\infty. \ (0{,}5 \textit{ puntos})$$

Por el criterio de la integral impropia se tiene que la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$ diverge (0,25 *puntos*). Finalmente, por el criterio de comparación para serie de términos positivos se concluye que la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2\sin^2(n)}$ diverge (0,25 *puntos*).

**P3.** Para $\bar{y} > 0$ fijo, considere la región plana $R_{\bar{y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ |y| \leq \bar{y}\right\}$.

**(a)** (2 *punto*) Dibuje la región $R_{\bar{y}}$ y el sólido de revolución generado por $R_{\bar{y}}$ en torno a $OY$.

**(b)** (4 *punto*) Calcule el volumen y el área del manto del sólido de revolución que se genera al rotar $R_{\bar{y}}$ en torno al eje $OY$.

**SOLUCIÓN.**

**(a)** El sólido de revolución generado en torno a OY es (1 *punto*):

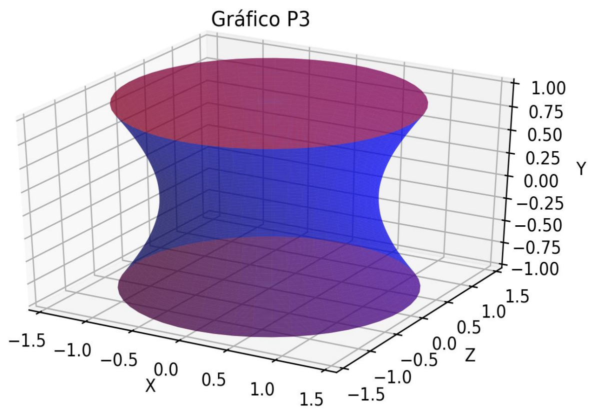



Figura 1: Sólido de revolución generado por $R_{\bar{y}}$

y la región $R_{\bar{y}}$ es (1 *punto*):

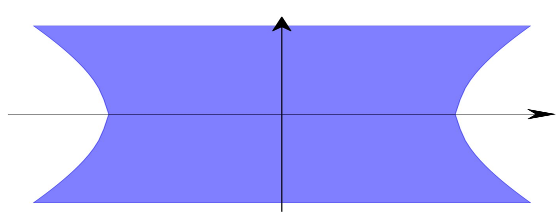


Figura 2: Región $R_{\bar{y}}$

**(b)** El el manto del sólido de revolución que se genera al rotar la región $R_{\bar{y}}$ en torno a OY es equivalente a la superficie de revolución generada al rotar la curva asociada a la función $f(y) = a\sqrt{\dfrac{y^2}{b^2}+1} = \dfrac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$, para $y \in [-\bar{y}, \bar{y}]$, alrededor del eje OY (0,5 *puntos*). Así que, utilizando la fórmula para el manto obtenemos:

$$A = 2\pi \int_{-\bar{y}}^{\bar{y}} \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}\sqrt{1+\frac{a^2y^2}{b^2(b^2+y^2)}}dy = 2\pi a \int_{-\bar{y}}^{\bar{y}} \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{b^4}y^2+1}dy \text{ (0,5 } puntos\text{)}$$

En lo anterior utilizamos el cambio de variables $y\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} = \tan(\theta)$ y nos queda

$$A = 2\pi \frac{b^2 a}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_{-\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)}^{\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)} \sec^3(\theta)d\theta = \int_{-\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)}^{\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)} \sec(\theta) + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^3(\theta)}d\theta. \text{ (0,5 } puntos\text{)}$$

Integrando por partes, vemos que

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^3(\theta)}d\theta = \frac{sen(\theta)}{2\cos^2(\theta)} - \frac{1}{2}\int \sec(\theta)d\theta$$

y por lo tanto nos queda

$$A = 2\pi \frac{b^2 a}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \frac{1}{2} \int_{-\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)}^{\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)} \sec(\theta) d\theta + \frac{sen(\theta)}{2\cos^2(\theta)} \Bigg|_{-\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)}^{\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)} \right). \ (0{,}5 \ puntos)$$

Recordando que $\int \sec(\theta) d\theta = \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C$ obtenemos

$$A = \frac{b^2 a\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + \tan(\theta)\sec(\theta) \Bigg|_{-\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)}^{\tan^{-1}\left(\bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\right)} \right). \ (0{,}5 \ puntos)$$

Finalmente usamos que $\sec(\theta) = \sqrt{1+\tan^2(\theta)}$ y nos queda

$$A = \frac{b^2 a\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \ln\left( \frac{\sqrt{1+\bar{y}^2\frac{a^2+b^2}{b^4}} + \bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}}{\sqrt{1+\bar{y}^2\frac{a^2+b^2}{b^4}} - \bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}} \right) + \bar{y}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\sqrt{1+\bar{y}^2\frac{a^2+b^2}{b^4}} \right) \ (0{,}5 \ puntos)$$

El volumen del sólido de revolución está dado por:

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{b^2}\left(y^2+b^2\right) dy = \pi \left( \frac{y^3}{3} + b^2 y \right) \Bigg|_{-\bar{y}}^{\bar{y}} = 2\pi \left( \frac{\bar{y}^3}{3} + b^2\bar{y} \right) (1{,}0 \ punto)$$