

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral

Profesores: Natalia Ruiz, Raúl Uribe, Cristián Reyes.

**Control 3**

1. a) **[3 puntos]** Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región plana R en torno al eje OX . La región R es aquella parte del plano encerrada por la parábola dada por la ecuación $y = \frac{x^2}{2a}$ y la recta $y = 4a - x$, en el primer cuadrante, donde a es una constante positiva.
- b) **[3 puntos]** Calcular el área del sector que se encuentra fuera de la cardiode $\rho = 3 + 2\sin\theta$ y dentro del círculo $\rho = 2$.
2. a) **[4 puntos]** Para una curva plana descrita por la parametrización $r(t) = (x(t), y(t))$, demostrar que la curvatura viene dada por la fórmula:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

- b) **[2 puntos]** Si una curva plana tiene la ecuación cartesiana $y = f(x)$, demostrar que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ es:

$$\frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

3. **[6 puntos]** Considere la curva Γ parametrizada por $r(t) = e^{-t}(\sin t, \cos t, 1)$ con $t \in [0, 1]$. En cada instante t , calcule los vectores tangente, normal y binormal, su curvatura y su torsión.