

**MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral**

Profesores: Natalia Ruiz, Raúl Uribe, Cristián Reyes.

**Control 2**

1. Calcule las siguientes integrales y primitivas.

a) [2 puntos]  $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

b) [2 puntos]  $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

c) [2 puntos]  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4 + 3 \cos(x)}$

2. a) Considere la función  $f : [0, 2]$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

i) [1 punto] Para la partición  $P = \{0, 6/7, 1, 8/7, 2\}$ , calcule la suma inferior  $s(f, P)$  y la suma superior  $S(f, P)$ .ii) [2 puntos] Demuestre que la función  $f$  es Riemann integrable en el intervalo  $[0, 2]$ .

b) [3 puntos] Calcule el valor del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times [\ln(n+i) - \ln(n)].$$

3. a) [3 puntos] Demuestre que  $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$  (Indicación: Es posible que necesite usar la igualdad  $\arccos(u) + \arccos(-u) = \pi$ )b) [3 puntos] Sea  $f$  derivable en todo  $\mathbb{R}$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$  se define  $g(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$ . Demuestre que si  $f$  es decreciente en todo  $\mathbb{R}$ , entonces  $g''(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (Indicación: Es posible que necesite usar TVM en el intervalo  $[x, x+1]$  para  $f$ .)