Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-2, Coordinado.
Miércoles 11 de Noviembre. Profesores: J. Boulanger, Sa. Martínez

CONTROL 3

P1. *a*) **(3pts)** Encontrar una función cuya transformada de Laplace es $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s^2-2s+2)}$.

b) **(3pts)** La siguiente ecuación es la ecuación de movimiento de una masa unida a un resorte que es golpeada con un martillo que ejerce un impulso sobre la masa en los tiempos $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \pi$

$$x'' + x = c_1\delta_{\frac{\pi}{2}} + c_2\delta_\pi,$$

cuyas condiciones iniciales son $x(0) = 1$, y $x'(0) = 0$. Determine las constantes c_1 y c_2 para que $x(t) \equiv 0$ para $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ y $x(t) = 3\,\mathrm{sen}(t)$ para $t > \pi$.

P2. *a*) **(1pt)** Demostrar que si la transpuesta de una matriz A satisface la relacion $A^T = -A$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, la matriz e^{tA} es ortogonal, es decir $(e^{tA})^T e^{tA} = I$.
Ind. *Recuerde que* $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

b) **(2pts)** Encontrar la solucion general del sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X(t)$.

c) Se considera el sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -2t & 2t \\ -4t & 4t \end{pmatrix} X(t)$$

1) **(2pts)** Demostrar que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2-e^{t^2} & e^{t^2}-1 \\ 2-2e^{t^2} & 2e^{t^2}-1 \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema y que $\Phi(0) = I_2$.

2) **(1pt)** Encontrar la solución del sistema tal que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

P3. *a*) Consideremos una masa m que se desplaza sobre una superficie horizontal con un coeficiente de fricción viscosa b. El sistema está sometido a una fuerza externa $f(t)$, y el movimiento se describe por la ecuación diferencial:

$$mv'(t) + bv(t) = f(t),$$

donde $v(t)$ es la velocidad de la masa. Se supone que $v(0) = 0$.

1) **(2pts)** Calcular la velocidad $v(t)$ en funcion de m y b cuando se aplica una fuerza constante aplicada entre los intantes 0 y t_0, con $0 < t_0$, es decir, $f(t) = H_0(t) - H_{t_0}(t)$.
2) **(1pt)** Representar gráficamente la respuesta obtenida.

b) **(3pts)** Ahora se añade un resorte de constante elástica k al sistema, de modo que la ecuación diferencial que describe el desplazamiento *de la posición* $x(t)$ de la masa se escribe:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t).$$

Se supone que $x(0) = x'(0) = 0$, y que además $m = 1/2$, $b = 1$ y $k = 1$. Calcular la solución $x(t)$ cuando $f(t) = -2e^{-t}\cos(t)$.

Ind. *Le puede ser útil la relación* $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$.

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

Tabla de Transformadas de Laplace y propiedades

Para la siguiente tabla de transformadas y propiedades elementales, suponemos $a \in \mathbb{R}$ y $\omega > 0$. Además denotamos para funciones f, g que admitan transformada $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ respectivamente.

Función	Transformada de Laplace
$\delta_a(t)$	e^{-as}
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^k,\ k \in \mathbb{N}$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\operatorname{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Función	Transformada de Laplace
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$t^k f(t),\ k \in \mathbb{N}$	$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s)$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f * g$	$F(s) \cdot G(s)$

Donde se recuerda además que

- $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$
- $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)]$, para todo α, β reales.
- $(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)g(t-u)du$ es la convolución entre las funciones f y g.
- $H_a(t)$ es la función escalón de Heaviside con salto en $t = a$, es decir $H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$.

  Obs. También se suele denotar $H_a(t)$ como $H(t-a)$.
- $\delta_a(t)$ es la delta o masa de Dirac en $t = a$.
- $f(0^+) := \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$. En particular, cuando f es continua en cero, se tiene que $f(0^+) = f(0)$.