Control 3

P1. *a*) (1 pts.) Sea (a_n) una sucesión de términos positivos que converge a $l > 0$.

(i) Demuestre que la sucesión $(\sqrt{a_n})$ es acotada inferiormente por un número positivo.

(ii) ¿Es cierto que $(\sqrt{a_n})$ converge a $\sqrt{l}$? En caso de que su respuesta sea afirmativa, demuestrelo, y en caso de que sea negativa entregue un contraejemplo.

b) (1 pts.) Determine si las siguiente sucesiones son convergentes o divergentes. En caso de converger, calcule el límite. En caso de divergir, justifique.

(i) $a_n = \ln(n^n)$,

(ii) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+6n+5}{(n+1)(n+2)}}$,

(iii) $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n!)}{(n+1)!+1}$,

(iv) $d_n = \left(\dfrac{3}{2} + \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

P2. El tamaño de una población de peces inalterada está modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio. Suponga que la población en el año $n=0$ es $p_0 > 0$.

a) (0,7 pts) Demuestre que si $a > b$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0.$$

En otras palabras, la población muere.
Hint: Le puede servir mostrar primero que $0 < p_{n+1} < \frac{b}{a}p_n$.

b) (0,7 pts) Suponga que $a < b$ y $p_0 < b-a$. Demuestre que la sucesión (p_n) es creciente y acotada superiormente.

c) (0,6 pts) Deduzca que si $b-a > 0$ y y $p_0 < b-a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_n = b-a.$$

P3. *a*) (1 pts.) Demuestre que la sucesión (s_n) definida por la fórmula

$$a_n = n\left(\exp\left(\frac{2n+1}{n}\right) - \exp(2)\right)$$

converge a e^2.

b) (1 pts.) Resuelva los siguientes enunciados:

(i) Demuestre que para todo $n \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.

(ii) Se define (s_n) una sucesión definida a través de la suma:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geq 1.$$

Demuestre que $s_n \geq \ln(n+1)$.

(iii) Concluya que la sucesión (s_n) diverge.

Duración: 3h00