



CONTROL 2

- P1.** a) (3 puntos) Expresar en la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el complejo $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$.
- b) (3 puntos) Considere la función $f(z) = f(x + iy) = x^2 + iy^2$. Demuestre que f es holomorfa (diferenciable) en todos los puntos de la línea $z = x + ix \in \mathbb{C}$ (es decir, en la recta $y = x$). Demuestre además, que f no es holomorfa (diferenciable) en todo $\mathbb{C}$. Justifique adecuadamente sus respuestas.

- P2.** a) (3 puntos) Argumente por qué la integral de $\exp(z)$ sobre $\partial D_1(0)$ es cero, es decir, por qué

$$\oint_{|z|=1} \exp(z) dz = 0.$$

Justifique adecuadamente sus respuestas.

- b) (3 puntos) Suponga que $f = u + iv$ es holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, donde u y v son de clase C^2 . Pruebe que u y v son armónicas en Ω , es decir, $\Delta u = \Delta v = 0$, donde Δ es el operador Laplaciano, definido por

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

- P3.** Calcule las siguientes integrales complejas. Puede escoger el método que considere conveniente y debe justificar cada paso. Considere que si la curva sobre la que se integra es cerrada, entonces está recorrida en sentido anti-horario.

a) (2 puntos) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz.$

b) (2 puntos) $\int z^2 dz$, donde $\gamma = \{t + it : t \in [0, 1]\}.$

c) (2 puntos) $\oint_{\partial D_{(1+i)}} \frac{\exp(z^2)}{(z-5)^6 z} dz.$

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

FORMULARIO

Formula de Cauchy-Riemann

- Una función de variable compleja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es *derivable* en $z_0 \in \Omega$ si y sólo si es *derivable en el sentido de Riemann* en (x_0, y_0) como función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y además se satisfacen las **condiciones de Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

En tal caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Integral compleja

- Dada una curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se define la integral compleja de f sobre γ por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k, \forall z \in D(p, r),$$

donde

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - p)^{k+1}} d\omega, \forall k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Notación

- Dado $p \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, $D_r(p) \equiv D(p, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - p| < r\}$ es el disco centrado en p de radio r y su borde corresponde a la curva $\partial D_r(p) \equiv \partial D(p, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - p| = r\}$.
- Dada f una función compleja, las siguientes notaciones son equivalentes

$$\oint_{\partial D(p, r)} f(z) dz \equiv \oint_{\partial D(p, r)} f(z) dz \equiv \oint_{|z - p| = r} f(z) dz.$$

Nota: Puede usar sin justificar cualquier teorema o resultado visto en clases, aunque no esté en el formulario. Sin embargo, si utiliza un resultado no visto en clases, debe demostrarlo.