



P1. Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) (1.0 pto.) Pruebe que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ 2x + y + 4z \\ x + 2z \end{pmatrix}$.

(b) (2.0 ptos.) Determine una base del núcleo de f , es decir, de $\text{Ker}(f)$, e indique si la función es inyectiva.

(c) (2.0 ptos.) Determine una base de $\text{Im}(f)$ e indique si la función es epiyectiva.

(d) (1.0 pto.) ¿Es f un isomorfismo?, es decir, ¿es f una función lineal biyectiva? Justifique.

P2. (a) (3.0 ptos.) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1 - v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$ bases de un espacio vectorial V . Sea $T: V \rightarrow V$ una función lineal cuya matriz representante con respecto a la base $\mathcal{B}$ en la partida (dominio) y la base $\mathcal{B}'$ en la llegada (codominio), es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule la matriz P de pasaje de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, esto es, la matriz representante de I_V donde la base en la partida es $\mathcal{B}'$ y la base en la llegada es $\mathcal{B}$. Use la matriz P junto a la matriz M para demostrar que la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ tanto en la partida (dominio) como en la llegada (codominio), es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (3.0 ptos.) Considere la transformación $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c \\ c + d \end{pmatrix}$.

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{A}$ en la partida y $\mathcal{B}$ en la llegada, donde

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

P3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y consideremos $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal tal que $\text{Ker}(T) \neq V$, es decir es un subespacio vectorial propio.

(a) (3.0 ptos.) Pruebe que T es epiyectiva y que $\dim(\text{Ker}(T)) = n - 1$.

(b) (3.0 ptos.) Pruebe que existe $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) \neq 0$ y defina $U = \langle \{v_0\} \rangle$, el subespacio vectorial generado por v_0 . Pruebe que

$$\text{Ker}(T) \cap U = \{0\},$$

y concluya que $V = U \oplus \text{Ker}(T)$.