Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Calcule la siguiente primitiva

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$$

Indicación: puede usar el cambio de variable $x = u^6$.

b) **(3,0 pts.)** Calcule la siguiente integral

$$\int_1^3 \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Indicación: puede usar que $\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2}$

P2. a) **(3,0 pts.)** Usando la regla de la cadena apropiadamente, calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}.$$

b) Considere las funciones $F, G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \int_0^x te^{-t}\ \mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^x \cos(\pi x)e^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Sea además $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$H(x) = F(x) - 2G'(x).$$

I) **(0,5 pts.)** Justifique que H es Riemann integrable en $[0,1]$.

II) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$H(1) = 1.$$

Indicación: puede usar que $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\ \mathrm{d}t = -2e^{-1}+1$.

P3. Sea $f\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$.

a) **(0,5 pts.)** Muestre que f es Riemann integrable en $[0,\pi/2]$.

b) **(0,5 pts.)** Sea $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ la partición equiespaciada de $[0,\pi/2]$, es decir $x_i = \frac{i\pi}{2n}$ con $i = 0,\dots,n$. Defina

$$f_-(x) = \begin{cases} \cos(x_1), & x \in [x_0,x_1) \\ \cos(x_2), & x \in [x_1,x_2) \\ \vdots \\ \cos(x_n), & x \in [x_{n-1},x_n] \end{cases} \qquad f_+(x) = \begin{cases} \cos(x_0), & x \in [x_0,x_1] \\ \cos(x_1), & x \in (x_1,x_2] \\ \vdots \\ \cos(x_{n-1}), & x \in (x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

Muestre que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

c) **(3,5 pts.)** Deduzca que para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ se tiene que

$$\frac{\pi}{2n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$

<u>Indicación:</u> Puede usar (sin necesidad de demostrar) las siguientes identidades tigonométricas.

- $\cos(k\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, donde $k,\alpha \in \mathbb{R}$

- $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$, donde $A,B \in \mathbb{R}$

d) **(1,5 pts.)** A partir de los apartados b) y c) encuentre el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

<u>Observación:</u> Solo está permitido usar los ítems b) y c). Cualquier otro método será invalidado.

<u>**Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.**</u>

Duración: 3h.