



Control 2

P1. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Respecto a f

- a) (1 pt.) Encuentre su dominio
- b) (1 pt.) Decida si es par o impar o ninguna de las anteriores
- c) (2 pts.) Demuestre que la función es estrictamente creciente en $[0, 1]$ y es estrictamente decreciente en $[-1, 0]$.
- d) (2 pts.) Encuentre el conjunto más grande $B \subset [0, \infty[$ (respecto a la contención de conjuntos) para el cual $f: B \rightarrow f(B)$ es biyectiva y encuentre en forma explícita $f^{-1}(x)$

P2. a) El paralelogramo $ABCD$ de la figura tiene perímetro $2p$ y su diagonal mide d (con $p > d$). El ángulo $\angle ABC$ lo denotaremos por α (con $0 < \alpha < \pi$).

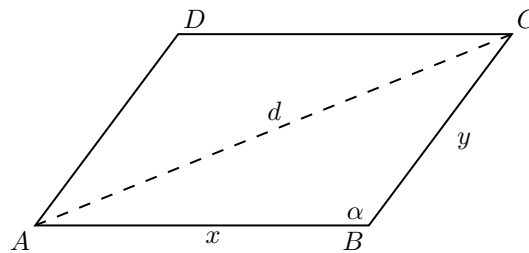


Figura 1: Paralelogramo $ABCD$

- i) (2 pts.) Denotando por x e y las longitudes de los lados AB y BC respectivamente, muestre que el área A del paralelogramo está dado por

$$A = xy \sin \alpha$$

- ii) (2 pts.) Deducir que

$$A = \frac{p^2 - d^2}{2} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

- b) (2 pts.) Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$

P3. a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Sea $\lambda < 0$. Definamos

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

- i) (1 pts.) Muestre que λA tiene ínfimo
- ii) (2 pts.) Muestre que $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$
- b) (3 pts.) Encuentre el supremo y el ínfimo (si es que existen) del conjunto

$$A = \left\{ \frac{m}{|m| + n} : m, n \in \mathbb{Z}, \quad n > 0 \right\}$$