Control 1

P1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{1}{|x|^3 + 1}.$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' allí, y encuentre todos los puntos críticos de f.

b) **(1,5 pts.)** Encuentre (si los hay) los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) **(1,5 pts.)** Determine (si los hay) los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava.

P2. a) **(3,0 pts.)** Sean α y β números reales positivos. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\beta x) - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(3x)} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ (1 + \alpha x)^{1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determine los valores de α y β que hacen que f sea continua en $\bar{x} = 0$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $a \in [0, 1]$. Demuestre que la ecuación $2x^3 = a(x^4 + 1)$, con incógnita $x \in \mathbb{R}$, tiene al menos una solución.

P3. Considere la función $f\colon (-1, +\infty) \to (-1/e, +\infty)$ dada por $f(x) = x\exp(x)$. Se tiene que f es biyectiva (no lo demuestre), por lo que admite una inversa $f^{-1}\colon (-1/e, +\infty) \to (-1, +\infty)$.

a) **(1,5 pts.)** Muestre que f^{-1} es derivable con
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x + \exp(f^{-1}(x))}$$
para todo $x \in (-1/e, +\infty)$.

b) **(1,5 pts.)** Demuestre la desigualdad
$$f^{-1}(x) + \exp(f^{-1}(x)) \geq x + 1$$
para todo $x \in (0, 1]$.
Indicación: Defina la función auxiliar $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f^{-1}(x) + \exp(f^{-1}(x))$ y use el teorema del valor medio en un intervalo conveniente.

c) **(1,5 pts.)** Muestre que $(f^{-1})'$ es derivable con
$$(f^{-1})''(x) = -\frac{x + 2\exp(f^{-1}(x))}{(x + \exp(f^{-1}(x)))^3}$$
para todo $x \in (-1/e, +\infty)$.

d) **(1,5 pts.)** Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f^{-1} en torno a $\bar{x} = 0$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.